

一、同平面非共點力系求合力、合力矩

(一) 共平面非共點非平行力系之代數解法：

1. 合力大小 $R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$

2. 合力方向 $\theta = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$

3. 合力位置 $d = \frac{\sum M_o}{R}$

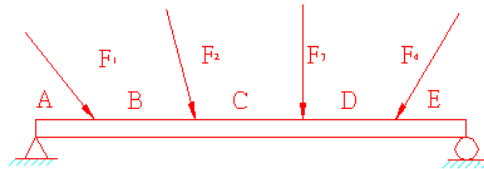
(二) 共平面非共點非平行力系之合力，可能產生形式有：

1. $R \neq 0$ ，則合力為一**單力**
2. $R = 0$ ($\sum F_x = 0$ 且 $\sum F_y = 0$)， $\sum M_o \neq 0$ ，則合力為一**力偶**
3. $R = 0$ ($\sum F_x = 0$ 且 $\sum F_y = 0$)， $\sum M_o = 0$ ，則合力為零(受力物體處於**平衡狀態**)

(三) 共平面非共點非平行力系合力之圖解法，可能有三種結果：

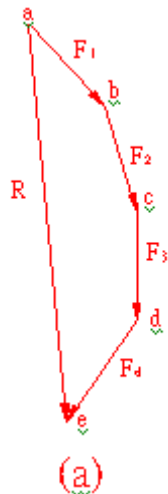
1. 若力的多邊形**不閉合**時，合力為一**單力**
2. 力多邊形閉合，而**索多邊形不閉合**時，合力為一**力偶**
3. 力多邊形與索多邊形**閉合**時，合力為為**零**，即表示物體為**靜止平衡狀態**。

[例] 將各力的大小與位置依比例尺繪製位置圖。



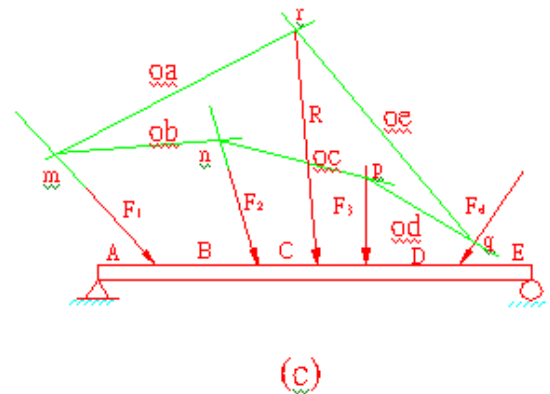
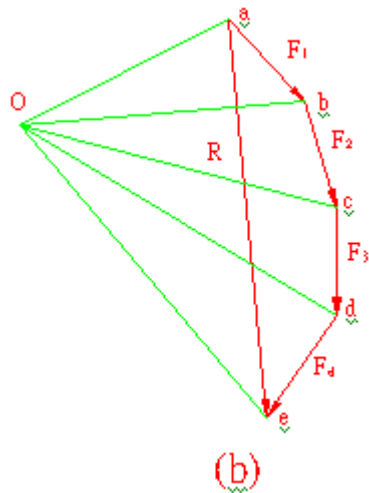
(一) 力多邊形

將各力之大小依其比例**平行繪製**，各力之間**頭尾相接**，並連接 **ae** 線段，其 **ae 線段之長度即表示合力之大小**，如圖(a)所示。



(二) 索多邊形

- 在力多邊形中任選一點 O ，並與各力連接成 oa 、 ob 、 oc等射線，如圖(b)所示。
- 於力多邊形上之 oa 、 ob 、 oc等射線，**平移**至位置圖上，並與作用力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 相交於 **m 、 n 、 p 、 q 、 r** 各點，如圖(c)所示。
- 於力線圖中**第一條索** oa 與**第二條** oe 之交點即為**合力之位置**。



二、同平面非共點非平行之力系平衡(求支承點反力)

(一)圖解法：力多邊形與索線多邊形均為閉合；代數法：合力為零，合力矩為零

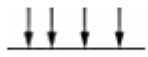
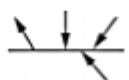
(二)平衡方程式：

1.須滿足：

- $\sum F_x = 0$ ， $\sum F_y = 0$ ， $\sum M_A = 0$ 。(建議使用)，可解三個未知數
- $\sum F_x = 0$ ， $\sum M_A = 0$ ， $\sum M_B = 0$ 。(其中 A 、 B 二點連線不得與 x 軸垂直)
- $\sum F_y = 0$ ， $\sum M_A = 0$ ， $\sum M_B = 0$ 。(其中 A 、 B 二點連線不得與 y 軸垂直)
- $\sum M_A = 0$ ， $\sum M_B = 0$ ， $\sum M_C = 0$ 。(A 、 B 、 C 為平面任意三點，但不能在同一直線上)

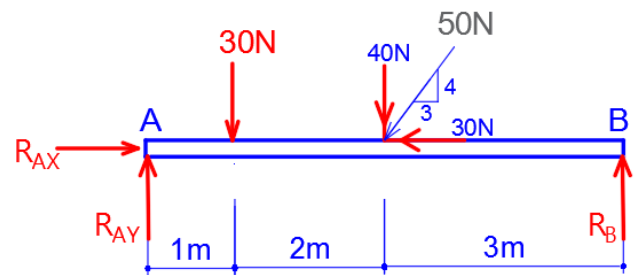
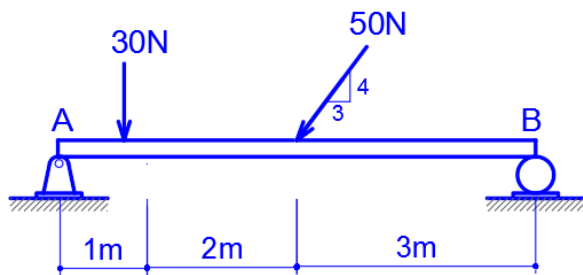
2.解法：

力系之分類及所需平衡條件式

力系之分類			簡圖	所需平衡條件數	
平面力系	共點	平行力系		1 個	$\Sigma F_x = 0$
		非平行力系		2 個	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
	非共點	平行力系		2 個	$\Sigma M = 0$ $\Sigma F_y = 0$
		非平行力系		3 個	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M = 0$

例

例題 4-3，求 A 點之水平及垂直反力與 B 點反力？



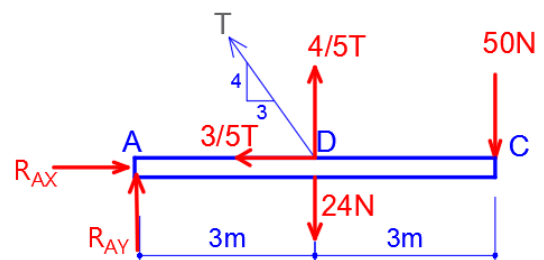
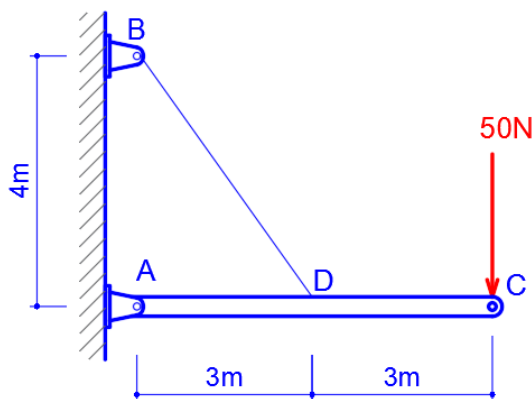
[解]：

$$M_A = 30 \times 1 + 40 \times 3 - R_B \times 6 = 0 \quad R_B = 25\text{N} \uparrow$$

$$\Sigma F_x = R_{AX} - 30 = 0 \quad R_{AX} = 30\text{N} \rightarrow \quad \Sigma F_y = R_{AY} + 25 - 30 - 40 = 0 \quad R_{AY} = 45\text{N} \uparrow$$

例

例題 4-4，桿重 24N，求繩索之張力及 A 點之支承反力？



[解]：

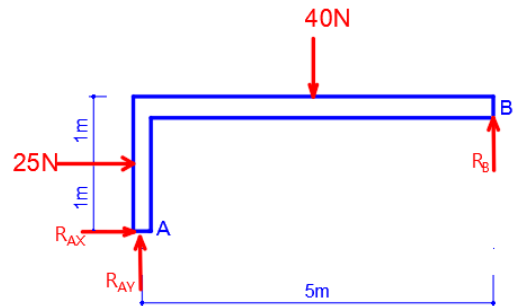
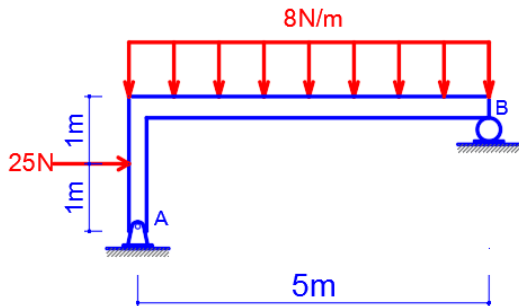
$$M_A = 50 \times 6 + 24 \times 3 - 4/5 T \times 3 = 0 \quad T = 155 \text{ N} \quad \swarrow$$

$$\sum F_X = R_{AX} - 3/5 \times 155 = 0 \quad R_{AX} = 93 \text{ N} \rightarrow \quad \sum F_Y = R_{AY} + 4/5 \times 155 - 24 - 30 = 0 \quad R_{AY} = 70 \text{ N} \uparrow$$

$$R_A = \sqrt{(93^2 + 70^2)} = 105.59 \text{ N}$$

例

例題 4-5，求 A 點之水平及垂直反力與 B 點反力？



[解]：

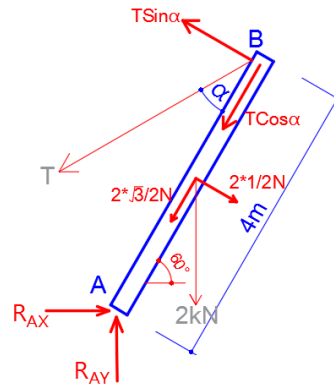
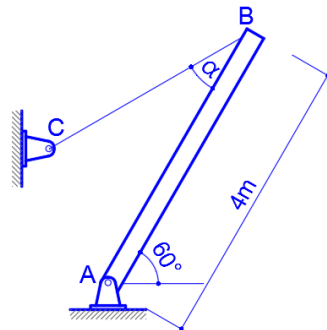
$$M_A = 25 \times 1 + 40 \times 2.5 - R_B \times 5 = 0 \quad R_B = 25 \text{ N} \uparrow$$

$$\sum F_X = R_{AX} + 25 = 0 \quad R_{AX} = -25 \text{ N} \leftarrow \quad \sum F_Y = R_{AY} - 40 + 25 = 0 \quad R_{AY} = 15 \text{ N} \uparrow$$

例

課後習題 10. 欲使繩子張力 T 對 A 點力矩等於桿件重對 A 點力矩，則 T ？

11. 欲使繩子張力最小，則 α 角度？ 12. 此時 T ？



[解]：

10.

$$\sum M_A = 1 \times 2 - T \sin 30^\circ \times 4 = 0 \quad T = 1 \text{ N} \quad \swarrow$$

11.

$$\sum M_A = 1 \times 2 - T \sin \alpha \times 4 = 0 \quad T \sin \alpha = 1/2 \text{ N}$$

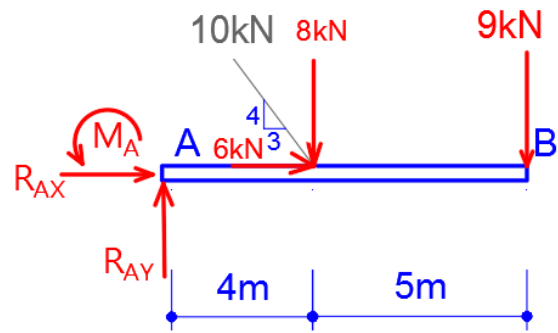
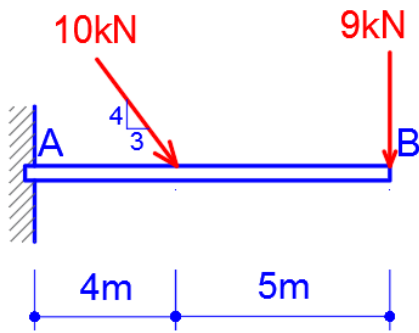
當 $\sin \alpha$ 值愈 $\uparrow$ ，則 T 值愈 $\downarrow$ ， $\alpha = 90^\circ$ 時， $\sin \alpha = 1$ 最大

12.

$$T \sin 90^\circ = 0.5 \quad T = 0.5$$

例

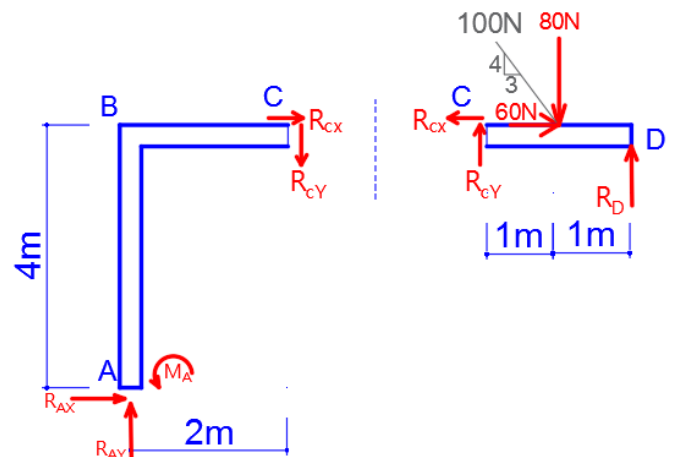
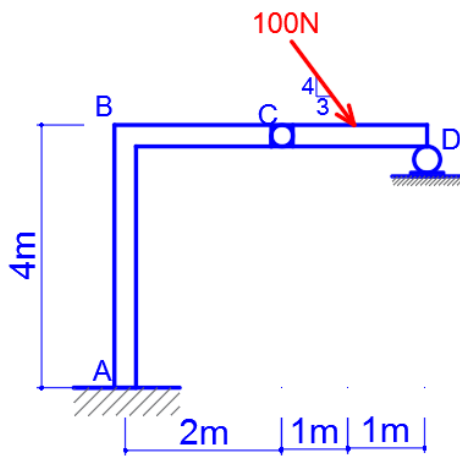
問答與計算 1. 試求 A 點之水平反力、垂直反力及彎矩？



[解]：

$$\begin{aligned}\sum M_A &= M_A - 8 \times 4 - 9 \times 9 = 0 & M_A &= 113 \text{ kN-m 逆} \\ \sum F_X &= R_{AX} + 6 = 0 & R_{AX} &= -6 \text{ kN} \leftarrow \\ \sum F_Y &= R_{AY} - 8 - 9 = 0 & R_{AY} &= 17 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

例 9. 試求 A 點之彎矩大小？



[解]：鉸接右邊自由體圖

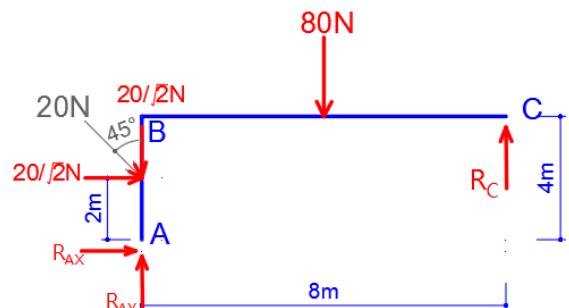
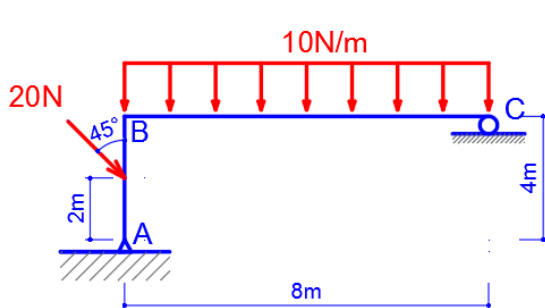
$$\sum M_C = 80 \times 1 - R_D \times 2 = 0 \quad R_D = 40 \text{ N} \uparrow$$

整體分析

$$\sum M_A = 80 \times 3 + 60 \times 4 - 40 \times 4 - M_A = 0 \quad M_A = 320 \text{ N-m 逆}$$

[歷屆試題]

(106 年) 4. 有一鋼架 ABC，其受力如下圖所示，求 C 點之反力大小？



[解]：

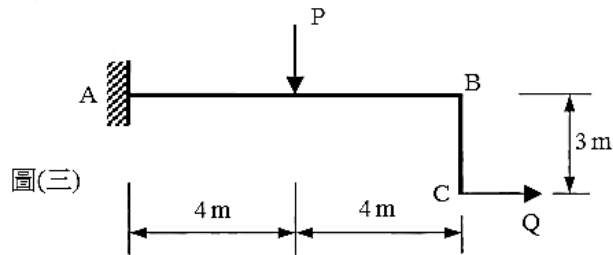
$$\sum M_A = \frac{20}{\sqrt{2}} \times 2 + 80 \times 4 - R_C \times 8 = 0 \quad R_C = 40 + \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ N} \uparrow$$

96-108 年歷屆考題—共平面非共點非平行力系

96 統測>1

26. 如圖(三)所示之 L 形懸臂梁 ABC，若 $Q = 20 \text{ kN}$ ，則 P 應為多少方可使該梁固定端支承 A 之彎矩反力 $M_A = 0$ ？

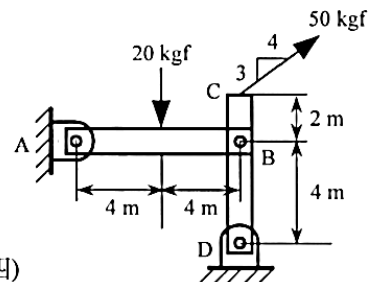
(A) $P = 15 \text{ kN}$ (B) $P = 20 \text{ kN}$ (C) $P = 25 \text{ kN}$ (D) $P = 30 \text{ kN}$



97 統測>2

25. 一組合梁所受外力如圖(四)所示，AB 桿件中央承受一 20 kgf 力，B 點為銷釘，C 點則有 50 kgf 的作用力，若 D 點在水平與垂直方向之反力分別為 D_x 、 D_y ，則：

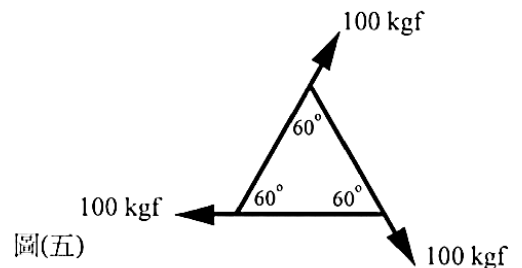
(A) $D_x = 10 \text{ kgf}$ (←)， $D_y = 20 \text{ kgf}$ (↑)
 (B) $D_x = 20 \text{ kgf}$ (→)， $D_y = 20 \text{ kgf}$ (↓)
 (C) $D_x = 20 \text{ kgf}$ (←)， $D_y = 40 \text{ kgf}$ (↑)
 (D) $D_x = 40 \text{ kgf}$ (→)， $D_y = 40 \text{ kgf}$ (↓)



97 統測>3

26. 一邊長為 10 m 的正三角形，其三端點承受作用力如圖(五)所示，則此力系之合力偶為：

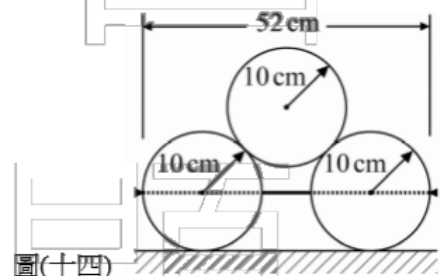
(A) 250 kgf-m (反時針)
 (B) 500 kgf-m (順時針)
 (C) $500\sqrt{3} \text{ kgf-m}$ (順時針)
 (D) $750\sqrt{3} \text{ kgf-m}$ (反時針)



99 統測>4

17. 三個重量皆為 120 N 、半徑為 10 cm 、均勻且相同的圓柱，下二上一疊起來側面如圖(十四)，以一條長 52 cm 之細繩索穿過下面兩圓柱中心，繫住下面兩圓柱，若不計所有摩擦力，則細繩索的張力為：

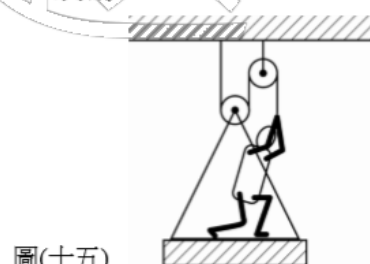
(A) 60 N
 (B) 80 N
 (C) 120 N
 (D) 160 N



99 統測>5

18. 某人的重量為 120 N ，站在平台上，平台重 90 N 懸掛在一滑輪上，一吊索一端固定於屋頂，繞過該滑輪，再繞過另一個固定於屋頂的滑輪，由這個人拉住如圖(十五)，若不計摩擦力，要使此構造系統保持靜止，則這個人作用於平板上的力為：

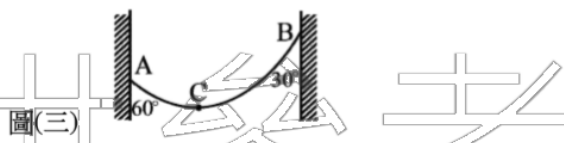
(A) 105 N
 (B) 60 N
 (C) 50 N
 (D) 35 N



00 統測>6

3. 一均勻的粗繩懸掛在兩垂直牆壁間而呈平衡，如圖(三)所示。若繩的兩端 A、B 點的切線與牆壁夾角分別為 60° 及 30° ，粗繩總重為 W ，C 點為粗繩上最低點，則 AC 段長度之繩重與 BC 段長度之繩重的比值為：

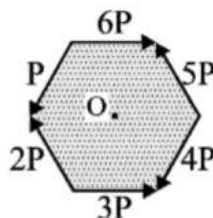
- (A) 3 : 5
(B) 3 : 4
(C) 1 : 2
(D) 1 : 3



00 統測>7

5. 邊長為 a 之正六邊形邊上施六個力，如圖(五)所示，對中心 O 點的合力矩為多少？

- (A) $3\sqrt{3}$ Pa 順時針
(B) $3\sqrt{3}$ Pa 逆時針
(C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Pa 順時針
(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Pa 逆時針

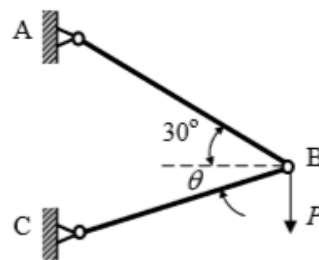


圖(五)

01 統測>8

15. 如圖(十)所示之二桿簡單桁架，AB 桿件與水平線之交角為 30° ，BC 桿件與水平線之交角為 θ ，其中 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 。下列有關 θ 角度與桿件軸力關係之敘述，何者不正確？

- (A) 當 $\theta = 0^\circ$ 時，AB 桿件之軸力較 BC 桿大
(B) 當 $\theta = 30^\circ$ 時，AB 與 BC 桿件之軸力絕對值相等
(C) 當 $\theta = 60^\circ$ 時，AB 桿件之軸力仍較 BC 桿大
(D) 當 $\theta = 90^\circ$ 時，AB 桿件之軸力較 BC 桿小

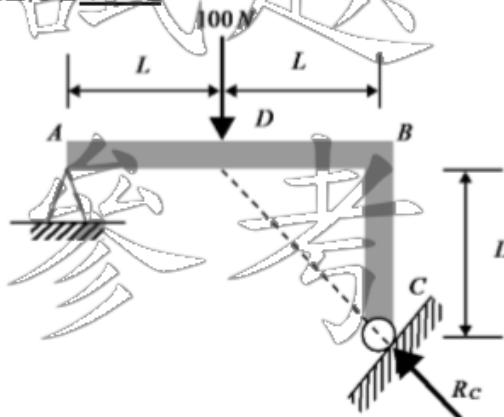


圖(十)

02 統測>9

6. 如圖(四)所示一樑，假設忽略其自重且只考慮外力作用。AB 長度為 $2L$ ，BC 長度為 L ，外力 ($100N$ 向下) 作用於 AB 之中點 D；A 為鉸支撐 (hinge)，C 為滾支撐 (roller)，C 點之反力 (reaction) R_C 作用線通過 D 點。下列敘述何者不正確？

- (A) $R_C = 141.4N$
(B) A 點垂直反力為 $A_y = 100N$ (向上)
(C) A 點水平反力為 $A_x = 100N$ (向右)
(D) ABC 整體可視為三力平衡構件

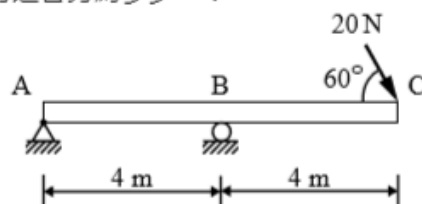


圖(四)

03 統測>10

15. 圖(十二)所示之外伸樑施力於 C 點，則 A 點反力之合力為多少 N？

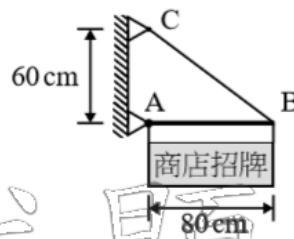
- (A) $10\sqrt{3}$
(B) $20\sqrt{3}$
(C) 10
(D) 20



圖(十二)

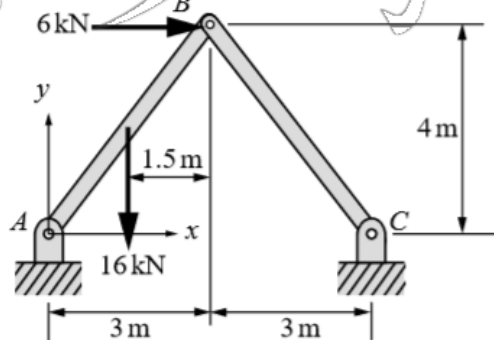
03 統測>11

17. 如圖(十四)所示之商店招牌，此招牌為均質且重 6 kN ，以桿件 AB 及繩索 BC 支承， A 點及 C 點均為鉸支承(hinge)。若不計桿件 AB 及繩索 BC 之重量，下列敘述何者正確？
- (A) A 點垂直方向之反力為 4 kN ，方向向上
 (B) A 點水平方向之反力為 3 kN ，方向向右
 (C) 繩索 BC 承受一張力，大小為 6 kN
 (D) 繩索 BC 承受一張力，大小為 5 kN



04 統測>12

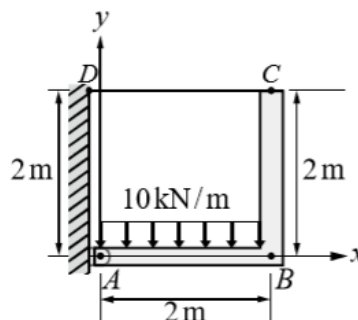
3. 如圖(三)所示之構架， A 、 C 為鉸支承(hinge)， B 為銷釘(pin)。求 A 點支撐反力為何？
- (A) $A_x = 3\text{ kN}$, $A_y = 12\text{ kN}$
 (B) $A_x = -3\text{ kN}$, $A_y = 8\text{ kN}$
 (C) $A_x = 0\text{ kN}$, $A_y = 32\text{ kN}$
 (D) $A_x = 0\text{ kN}$, $A_y = 8\text{ kN}$



圖(三)

04 統測>13

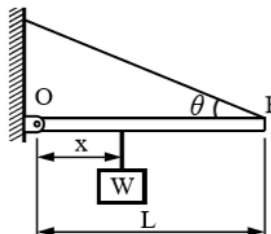
4. 如圖(四)之結構， A 為鉸支承(hinge)， CD 為二力繫桿忽略其自重。 ABC 為 L 形彎梁，每單位長度自重為 1 kN/m ，且 AB 段受垂直之均佈荷重 10 kN/m 。求 A 點反力為何？
- (A) $A_x = 11\text{ kN}$, $A_y = 24\text{ kN}$
 (B) $A_x = 12\text{ kN}$, $A_y = 22\text{ kN}$
 (C) $A_x = 13\text{ kN}$, $A_y = 24\text{ kN}$
 (D) $A_x = 13\text{ kN}$, $A_y = 22\text{ kN}$



圖(四)

05 統測
>14

1. 木棒長 L ，其重量可忽略。一端 O 以鉸(hinge)支承固定於牆上，另一端 P 用細繩懸於牆，使木棒成水平，細繩與木棒成 θ 之夾角，於木棒上距 O 點為 x 距離處掛一重 W 的物體，其平衡狀態如圖(一)所示。今若將木棒上重物之位置向右移(即令 x 增大)，下列何者正確？
- (A) 細繩張力變大
 (B) 鉸(hinge)支承施予木棒作用力的水平分力變小
 (C) 鉸(hinge)支承施予木棒作用力的垂直分力變大
 (D) 鉸(hinge)支承與細繩施予木棒的合力變大

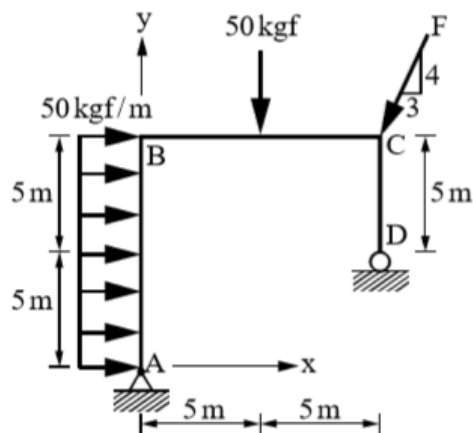


圖(一)

05 統測>15

15. 有一剛架如圖(十四)所示，若 $F=100\text{ kgf}$ ，則下列敘述何者不正確？

- (A) A 點 x 向反力為 440 kgf ($\leftarrow$)
 (B) A 點 y 向反力為 165 kgf ($\uparrow$)
 (C) D 點 y 向反力為 295 kgf ($\uparrow$)
 (D) A 點反力合力大小為 $\sqrt{(165^2 + 440^2)}\text{ kgf}$

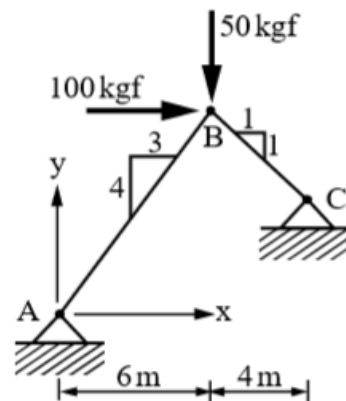


圖(十四)

05 統測>16

16. 有一結構如圖(十五)所示，則下列敘述何者正確？

- (A) C 點 x 向反力為 $\frac{250}{7}\text{ kgf}$ ($\rightarrow$)
 (B) A 點 x 向反力為 $\frac{150}{7}\text{ kgf}$ ($\rightarrow$)
 (C) A 點 y 向反力為 $\frac{200}{7}\text{ kgf}$ ($\downarrow$)
 (D) C 點反力合力大小為 $\frac{550}{7}\text{ kgf}$

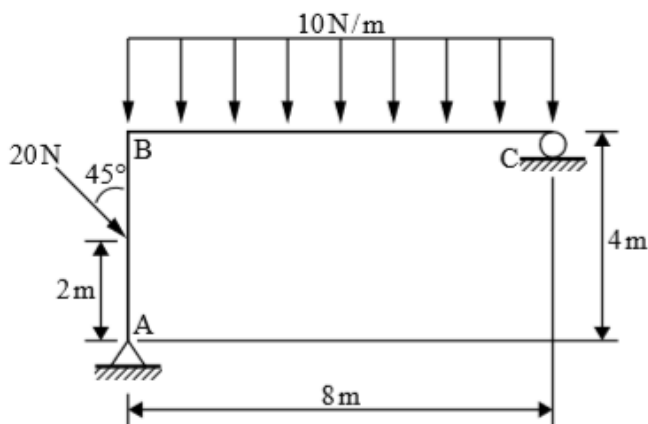


圖(十五)

06 統測>17

4. 有一鋼架 ABC，其受力如圖(四)所示，求 C 點之反力大小為何？

- (A) $\left(40 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\text{ N}$ (B) $\left(40 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\text{ N}$ (C) $\left(40 - \frac{10}{\sqrt{2}}\right)\text{ N}$ (D) $\left(40 + \frac{10}{\sqrt{2}}\right)\text{ N}$



圖(四)

08 統測>18

3. 對共平面非共點非平行力系而言，其平衡之條件方程式數目為幾個？

- (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個