

一、應力方塊

(一) 界定平面：

以平面法向量與軸向的關係來定義。

如法向量指向X軸，則為X平面，以此類推。

(二) 剪應力：

1. 為平行平面的應力，通常平面上有兩個剪應力。

如X平面上有 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、Y平面上有 τ_{yx} 、 τ_{yz} 、

Z平面上有 τ_{zx} 、 τ_{zy} 。

2. τ_{xy} ：在x平面上，箭頭指向y軸。

判斷方向：

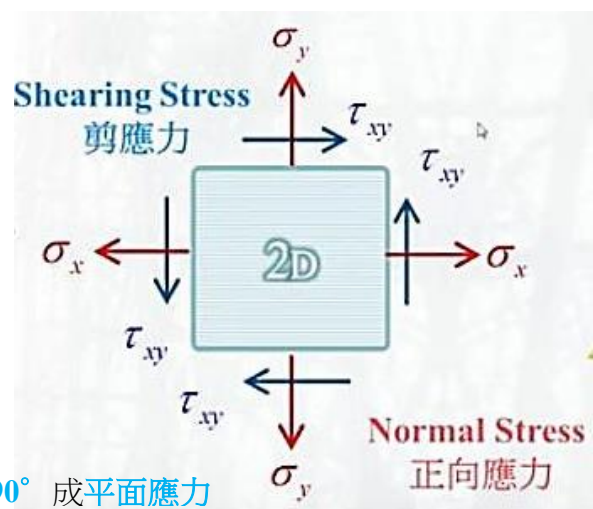
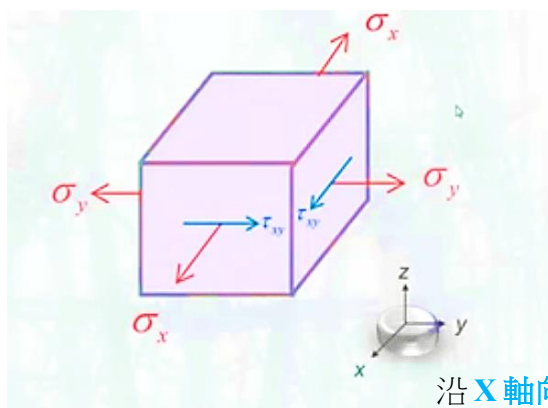
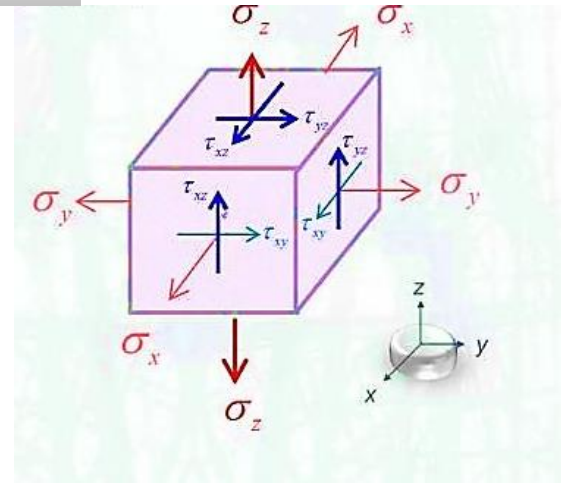
1. 以所在平面判定，法向量指向正軸向，則平面為(+)，否則為(-)。

2. 箭頭指向與正軸向相同者為(+)；相反者為(-)

3. 剪應力(+)(-)：所在平面與箭頭指向皆為(+)或(-)時為正值；否則為負值

(三) 平面應力

指三軸向應力少了某一軸向應力元素時，如Z軸向應力(包括 σ_z 、 τ_{zx} 、 τ_{zy} 、 τ_{yz} 、 τ_{xz})，此時稱作平面應力。

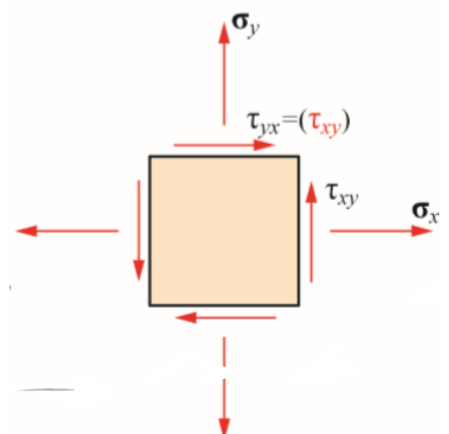


二、任意θ上之平面應力

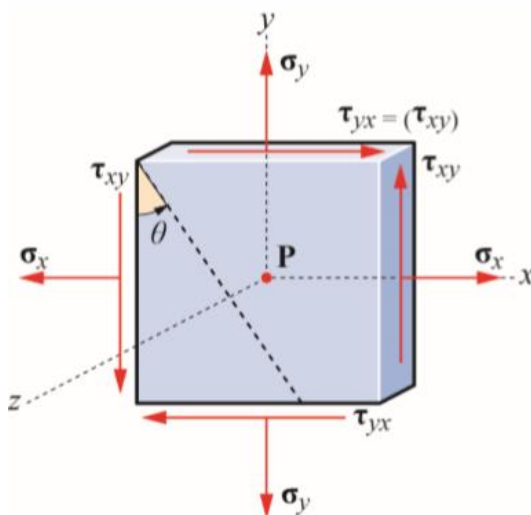
(一) 0°時之X面應力：

1. 正交應力：僅受 σ_x 作用， $\sigma_n = \sigma_x$

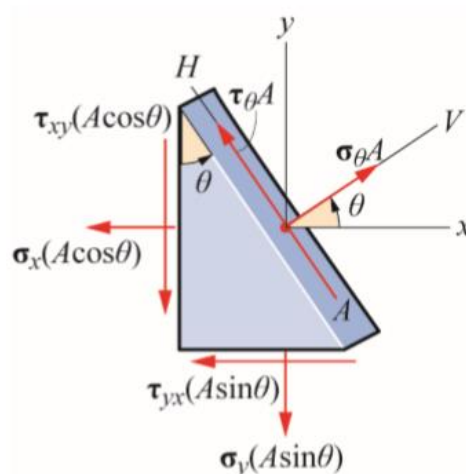
2. 剪應力：僅受 τ_{xy} 作用， $\tau = \tau_{xy}$



(二) θ 時之斜面應力(逆時針角度)



(a)



(b)

1. 正交應力：同時受 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 作用

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

2. 剪應力：同時受 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 作用

$$\tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

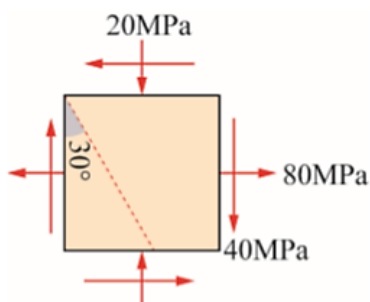
※若題目給予的是比值，此時應把單角函數轉變成雙角函數值

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

例

如圖所示之平面應力元件，試求作用在一與垂直面夾角為 30° 之正交應力及剪應力。



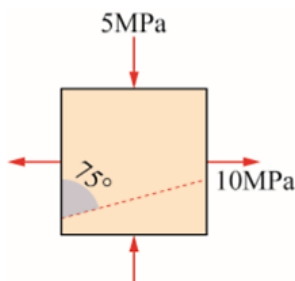
[解]： $\theta = 30^\circ$ ， $2\theta = 60^\circ$ ， $\sigma_x = 80MPa$ ， $\sigma_y = -20MPa$ ， $\tau_{xy} = -40MPa$

$$1. \sigma_{30^\circ} = \frac{80 + (-20)}{2} + \frac{80 - (-20)}{2} \cos 60^\circ + (-40) \sin 60^\circ = 20.36MPa$$

$$2. \tau_{30^\circ} = -\frac{80 - (-20)}{2} \sin 60^\circ + (-40) \cos 60^\circ = 63.3 \text{ MPa}$$

例

如圖所示之平面應力元件，試求作用在一與垂直面夾順時針 75° 角之正交應力及剪應力。



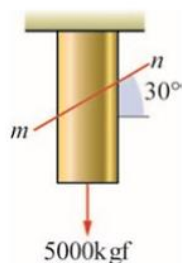
[解]： $\theta = -75^\circ$ ， $2\theta = -150^\circ$ ， $\sigma_x = 10 \text{ MPa}$ ， $\sigma_y = -5 \text{ MPa}$ ， $\tau_{xy} = 0$

$$1. \sigma_{-75^\circ} = \frac{10 + (-5)}{2} + \frac{10 - (-5)}{2} \cos(-150^\circ) + 0 \times \sin(-150^\circ) = -3.995 \text{ MPa}$$

$$2. \tau_{-75^\circ} = -\frac{10 - (-5)}{2} \sin(-150^\circ) + 0 \times \cos(-150^\circ) = 3.75 \text{ MPa}$$

例

一斷面 $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ 之木柱，如圖所示，受軸拉力 5000kgf 之作用，試求 m-n 斷面之正交應力 σ' 及剪應力 τ' 應為若干？



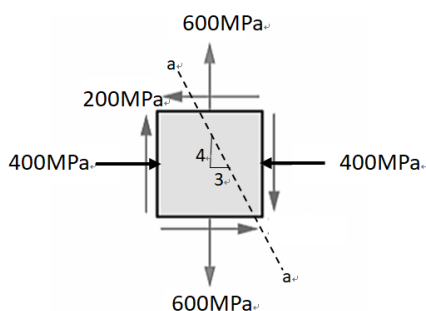
[解]： $\theta = 60^\circ$ ， $2\theta = 120^\circ$ ， $\sigma_x = 0$ ， $\sigma_y = \frac{5000}{100} = 50 \text{ kgf/cm}^2$ ， $\tau_{xy} = 0$

$$1. \sigma_{120^\circ} = \frac{0 + 50}{2} + \frac{0 - 50}{2} \cos 120^\circ + 0 \times \sin 120^\circ = 37.5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$2. \tau_{120^\circ} = -\frac{0 - 50}{2} \sin 120^\circ + 0 \times \cos 120^\circ = 21.65 \text{ kgf/cm}^2$$

例

如圖所示，平面應力元件，於 a 斜面上，其正交應力與剪應力各為多少？

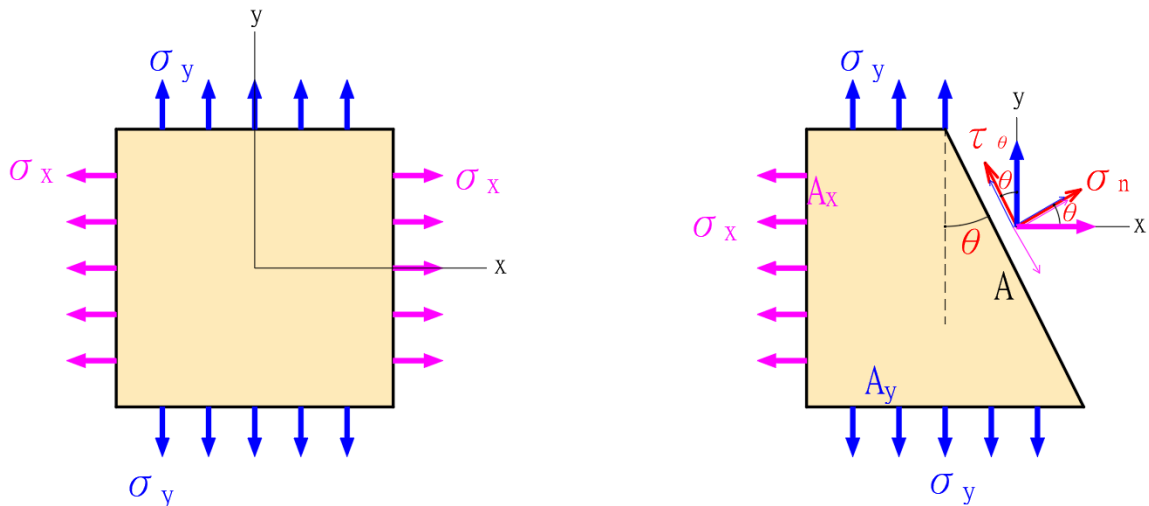


三、主平面與主應力

- (一) **主應力**：當斜面上的剪應力為零時，斜面上正交應力將產生最大或最小的正交應力，此時的正交應力稱為**主應力**
- (二) **主平面**：產生最大或最小的正交應力之平面稱為**主平面**

四、莫耳圓

- (一) 雙軸向應力分析：**x**，**y** 面無剪應力



1. **X** 面作用力 = $\sigma_x \cdot A_x$

(1) 分解出斜面上之正向力 = $\sigma_x \cdot A_x \cdot \cos \theta$

$$\text{斜面上之正向應力} = \frac{\sigma_x \cdot A_x \cdot \cos \theta}{A} = \frac{\sigma_x \cdot A_x \cdot \cos \theta}{\frac{A_x}{\cos \theta}} = \sigma_x \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta$$

(2) 分解出斜面上之剪力 = $\sigma_x \cdot A_x \cdot \sin \theta$

$$\text{斜面上之剪應力} = \frac{\sigma_x \cdot A_x \cdot \sin \theta}{A} = \frac{\sigma_x \cdot A_x \cdot \sin \theta}{\frac{A_x}{\cos \theta}} = \sigma_x \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

2. **y** 面作用力 = $\sigma_y \cdot A_y$

(1) 分解出斜面上之正向力 = $\sigma_y \cdot A_y \cdot \sin \theta$

$$\text{斜面上之正向應力} = \frac{\sigma_y \cdot A_y \cdot \sin \theta}{A} = \frac{\sigma_y \cdot A_y \cdot \sin \theta}{\frac{A_y}{\sin \theta}} = \sigma_y \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta$$

(2) 分解出斜面上之剪力 = $\sigma_y \cdot A_y \cdot \cos \theta$

$$\text{斜面上之剪應力} = \frac{\sigma_y \cdot A_y \cdot \cos \theta}{A} = \frac{\sigma_y \cdot A_y \cdot \cos \theta}{\frac{A_y}{\sin \theta}} = \sigma_y \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

3. 斜面應力

(1) 正交應力 $\sigma_n = \sigma_x \cdot (\cos \theta)^2 + \sigma_y \cdot (\sin \theta)^2$

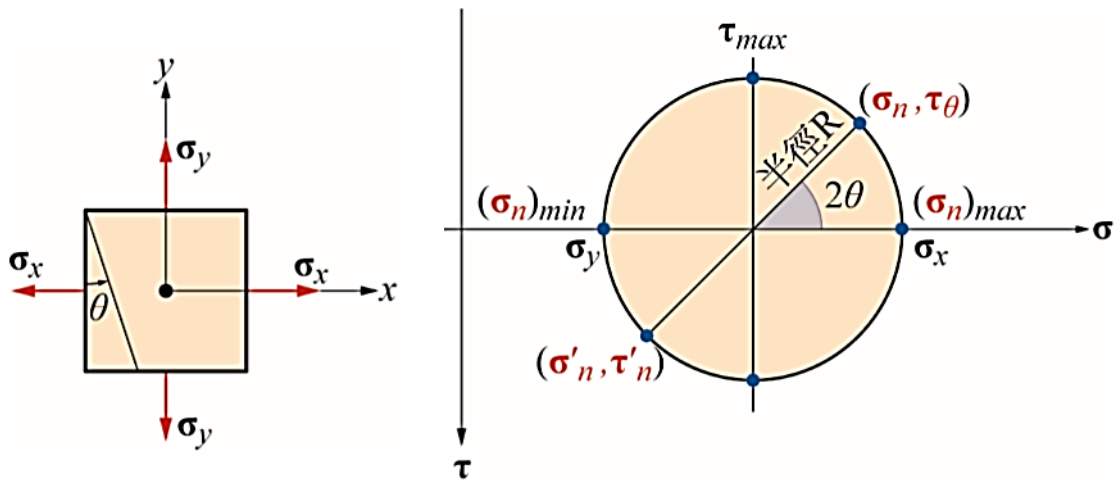
$$\sigma_n = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\theta$$

(2)剪應力 $\tau_\theta = -\sigma_x \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \sigma_y \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$

$$\tau_\theta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \sin 2\theta$$

※剪應力以逆時針為(+); 順時針為(-)

4.莫耳圓



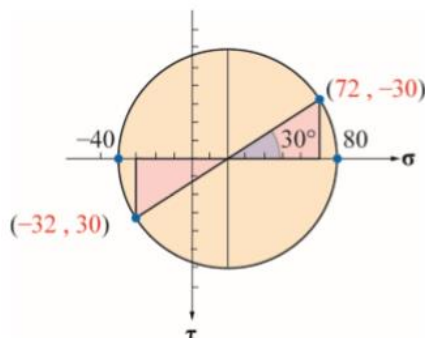
- (1) 假設 $\sigma_x > \sigma_y$ ，逆時針旋轉角度 2θ
- (2) 以 σ_n 為 x 軸； τ 為 -y 軸(逆轉時， τ_θ 為 - 值)
- (3) 圓上點代表任一面上之應力值，尤其與 σ_n 軸相交的兩點代表主應面
 $(\sigma_x, 0)$ ：最大主應力； $(\sigma_y, 0)$ ：最小主應力 [此時剪應力為 0]
- (4) 圓心點 $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ ，半徑 $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \tau_{max}$
- (5) 餘應力： $\sigma_n + \sigma'_n = \sigma_x + \sigma_y$ $\tau_\theta + \tau'_n = 0$

例

某材料承受雙軸向應力，若 $x=80\text{MPa}$ ， $y=-40\text{MPa}$ ，試求在 15° 斜斷面上之

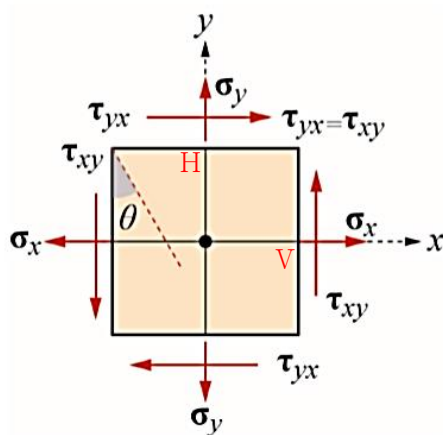
- (1) 正交應力 σ_n 及剪應力 τ_θ 大小為何？ (2) 餘應力 σ'_n 與 τ'_n 之大小為何？

[解]：

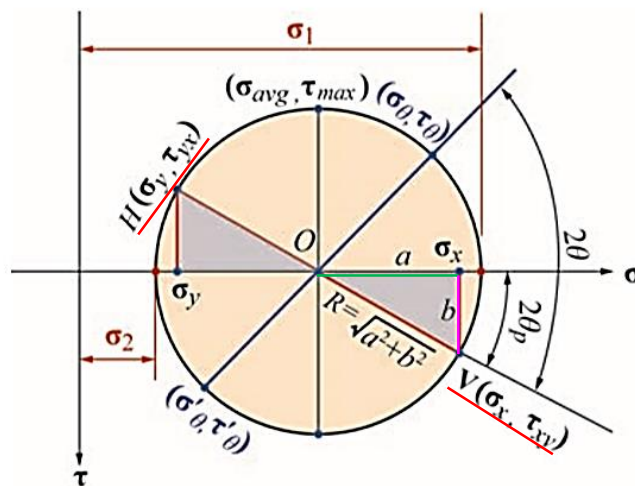


1. $(\sigma_x, 0)=(80,0)$ $(\sigma_y, 0)=(-40,0)$ $2\theta = 30^\circ$
2. 圓心點 $(\frac{80+(-40)}{2}, 0)=(20,0)$ 半徑=60
3. $\sigma_n=20+60 \times \cos 30^\circ=72\text{MPa}$
 $\tau_\theta = -60 \times \sin 30^\circ = -30\text{MPa}$
4. $72+\sigma'_n=80+(-40)$ $\sigma'_n = -32\text{MPa}$
 $-30 + \tau'_n = 0$ $\tau'_n = 30\text{MPa}$

(二) 平面應力分析：x，y 面有剪應力



(a)平面應力元素



(b)平面應力之莫耳圓

- (1) x 面與 y 面之剪應力 τ_{xy} ， τ_{yx} 大小相等，方向相反
- (2) V 面應力 (σ_x, τ_{xy}) ，H 面應力 $(\sigma_y, -\tau_{yx})$
- (3) 圓心點 $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ ， $a = |\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}|$ ， $b = |\tau_{xy}|$ ，半徑 $R = \sqrt{a^2 + b^2} = \tau_{max}$
- (4) 最大主應力 $\sigma_1 = (\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R, 0)$ 最小主應力 $\sigma_2 = (\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R, 0)$
- (5) 斜面 θ 應力 $(\sigma_\theta, \tau_\theta)$

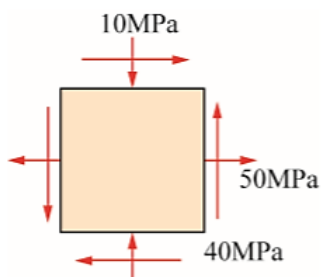
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \sin 2\theta$$

例

如圖所示之平面應力元件，若 $\sigma_x = 50\text{MPa}$ ， $\sigma_y = -10\text{MPa}$ ， $\tau_{xy} = 40\text{MPa}$ ，試求其：

- (1) 最大主應力 σ_1 及最小主應力 σ_2 。
- (2) 最大剪應力 τ_{max} 。



[解]：

$$V(50, 40), H(-10, -40)$$

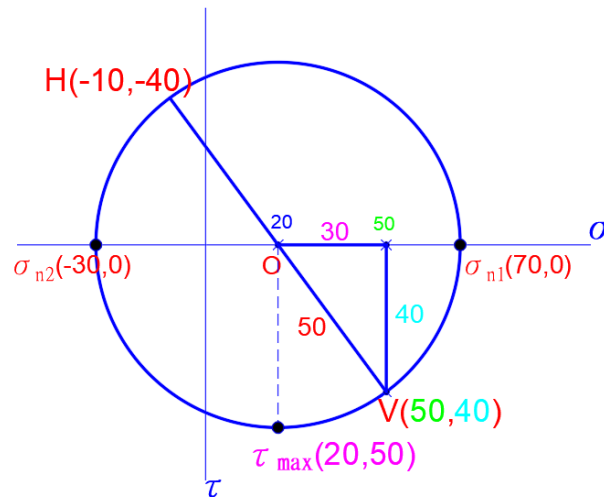
1. 圓心點 $(\frac{50+(-10)}{2}, 0)=(20,0)$, $a=50 - 20 = 30$, $b=40$

2. 半徑 $R=\sqrt{30^2 + 40^2} = 50 = \tau_{max}$

3. 最大主應力 $\sigma_1 = (20 + 50, 0) = (70, 0)$

最小主應力 $\sigma_2 = (20 - 50, 0) = (-30, 0)$

4. 莫耳圓



13-2 隨堂練習

- () 1. 在主平面 (Principal Plane) 上： (A) 正交應力為零 (B) 有最大剪應力
(C) 剪應力為零 (D) 最大主應力為零。
- () 2. 一平面應力元件，承受 $\sigma_x = 50 \text{ kgf/cm}^2$ ， $\sigma_y = 150 \text{ kgf/cm}^2$ ， $\tau_{xy} = 50 \text{ kgf/cm}^2$ ，
試求作用於最大剪應力平面上之正交應力 σ 為若干？
(A) 100 (B) 75 (C) 50 (D) 25 kgf/cm^2 。
- () 3. 某平面應力元件，承受 $\sigma_x = 40 \text{ kgf/cm}^2$ ， $\sigma_y = 40 \text{ kgf/cm}^2$ ，則該元件之最大剪應力應為： (A) 0 (B) 40 (C) 80 (D) 160 kgf/cm^2 。
- () 4. 某一平面應力元件如圖 13-14 所示，已知其中之一主應力為 8 ksi，
則另一主應力大小為： (A) 4 (B) 3.25 (C) 3 (D) 1.5 ksi。
- () 5. 承上題條件，此平面應力元件之最大剪應力應為：
(A) 6.5 (B) 3.25 (C) 3 (D) 0 ksi。

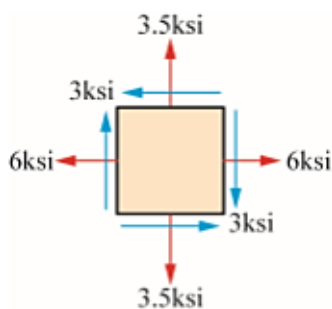


圖 13-14

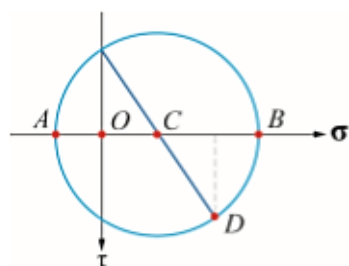


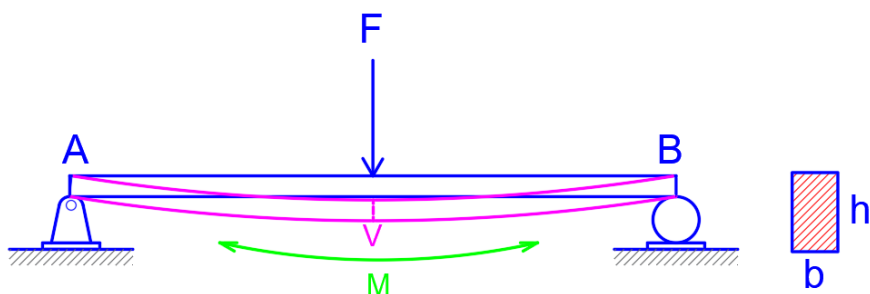
圖 13-15

- () 6. 如圖 13-15 所示為一平面應力元素之莫耳圓 (Mohr's circle)，其中 C 為圓心、 O 為垂直應力與剪應力 ($\sigma - \tau$) 平面座標之原點， A 、 B 則為莫耳圓與 σ 軸之交點。若已知 $OC = 40 \text{ kgf/cm}^2$ ， $CB = 75 \text{ kgf/cm}^2$ ，下列有關本平面應力元素應力之敘述，何者不正確？
(A) 最大主應力為 115 kgf/cm^2 (B) 最小主應力為 -40 kgf/cm^2
(C) 最大剪應力為 75 kgf/cm^2 (D) 最大正交應力為 115 kgf/cm^2 。

五、合成應力

(一)梁內應力與合成應力

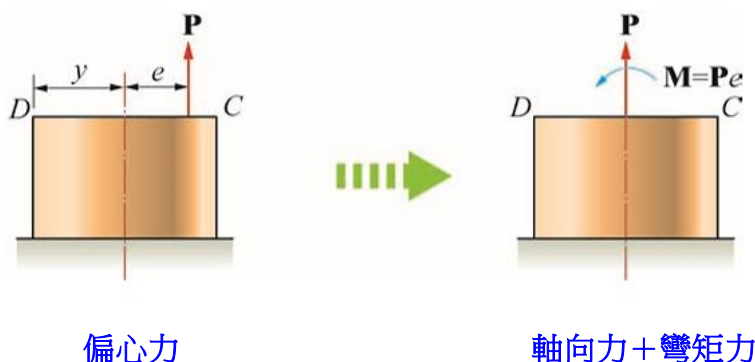
1.梁內應力：剪力及彎矩力



(1) 彎曲應力： $\sigma = \frac{My}{I}$ ，受力面與橫斷面有關係

(2) 剪應力： $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ ，受力面與橫斷面有關係

2.合成應力：偏心力產生軸向力與彎矩力



偏心力

軸向力+彎矩力

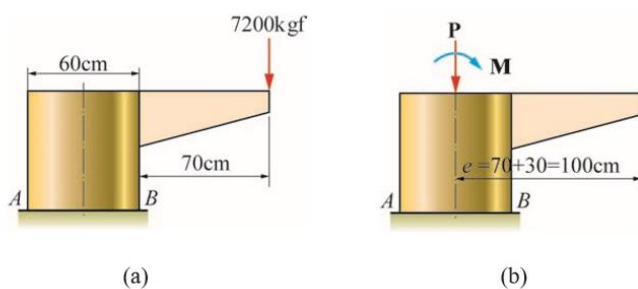
(1) 軸向應力： $\sigma = \frac{P}{A}$ ，受力面與正向面有關係

(2) 彎曲應力： $\sigma = \frac{My}{I}$ ，受力面與正向面有關係

(3) 合成應力： $\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{My}{I}$

例

如圖所示之短方柱，柱斷面為 60cm×60cm，在懸臂梁自由端處受一 7200kgf 之偏心荷重作用，試求短柱之最大壓應力 σ_{C-max} 及最大拉應力 σ_{T-max} 各為若干 kgf/cm²？



[解]：

$$\text{軸向應力：}\sigma = -\frac{P}{A} = -\frac{7200}{3600} = -2 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\text{彎曲應力：}\sigma_{CB} = -\frac{My}{I} = -\frac{7200 \times 100 \times 30}{\frac{60 \times 60^3}{12}} = -20 \text{ kgf/cm}^2$$

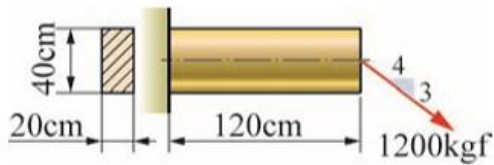
$$\sigma_{TA} = \frac{My}{I} = \frac{7200 \times 100 \times 30}{\frac{60 \times 60^3}{12}} = 20 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{C-max} = -2 + 20 = 18 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{T-max} = -2 - 20 = -22 \text{ kgf/cm}^2$$

例

圖所示懸臂梁，其斷面為 $20\text{cm} \times 40\text{cm}$ ，在自由端處受一傾斜拉力 1200kgf 之作用，試求梁頂及梁底之最大應力各為若干 kgf/cm^2 ？



13-3 隨堂練習

- () 1. 如圖 13-20 所示之懸臂梁，長為 1m ，斷面為 $10\text{cm} \times 20\text{cm}$ ，在自由端處受一傾斜拉力 1000kgf 之作用，試問 A 點所受應力為若干？

(A) $+90$ (B) -90 (C) $+4$ (D) -86 kgf/cm^2 。

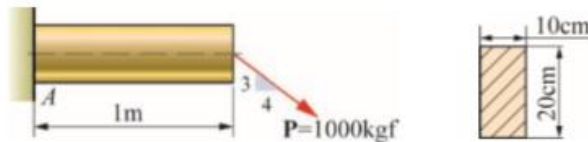


圖 13-20

- () 2. 如圖 13-21 所示，構件固定端 A 側之應力為：

(A) $+4$ (B) -240 (C) -236 (D) $+244$ kgf/cm^2 。

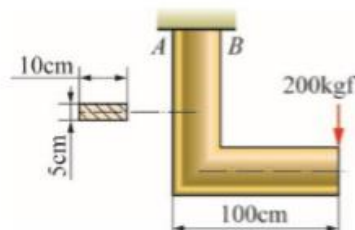


圖 13-21

- () 3. 續上題，構件固定端 B 側之應力為：

(A) $+4$ (B) -240 (C) -236 (D) $+244$ kgf/cm^2 。