

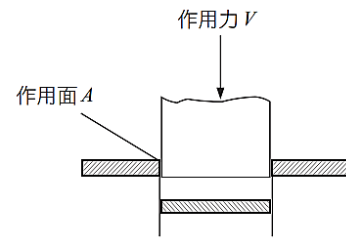
一、剪應力與剪應變

(一) 定義：作用力與作用面互相平行之應力，稱為剪應力。以 τ 表示。

1. 公式： $\tau = \frac{P}{A_s}$

2. 單位： kgf/cm^2 ， $\text{Pa}=\text{N/m}^2$ ， $\text{psi}=\text{lb/in}^2$

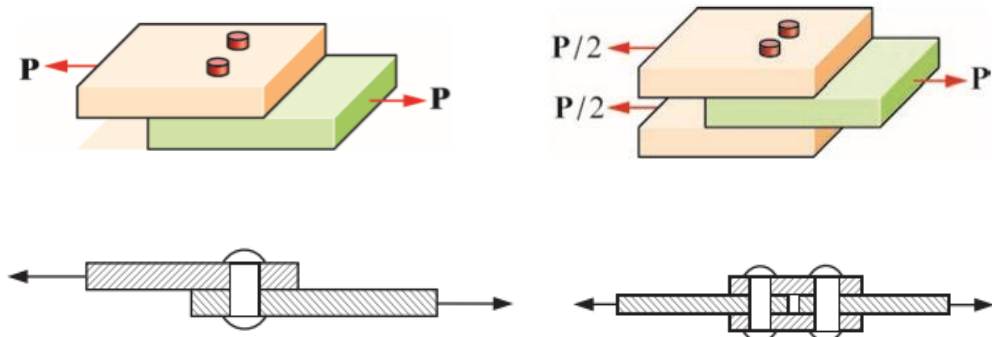
(二) 常見剪應力之型式：



重點一

1. 單剪型式： $\tau = \frac{P}{n \times A}$ ，如左圖所示。n 為螺栓個數

2. 雙剪型式： $\tau = \frac{P}{n \times 2A}$ ，如右圖所示。



例 如圖 10-4 (a) 所示，三塊鋼板由兩支 1.2cm 直徑之螺栓接合，已知鋼板所受 $P = 50\text{kN}$ 之拉力作用，試求任一螺栓所受之剪應力為何？

例 如圖 10-5 (a) 所示，欲使 3cm 厚之鋼板，貫穿 2cm 直徑之圓孔，鋼板之抗剪強度為 1MPa ，試求外力 P 為若干？

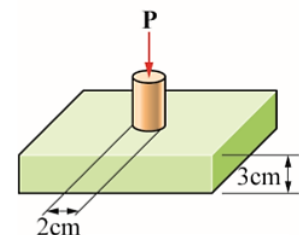


圖 10-5(a)

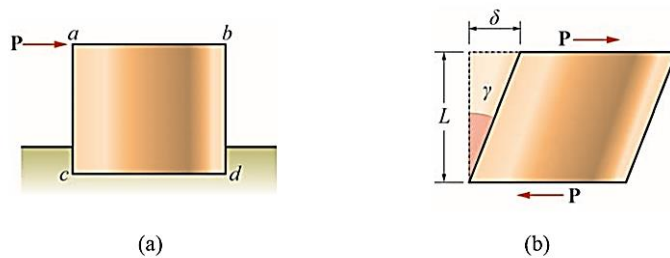
※此時 A 為圓柱體之圓周長 $\times$ 鋼板厚

(三) 剪應變：1. 材料受側向力（剪力）作用產生側向變形，

2. 單位長度 L 產生之側向變形量 δ 。以 γ 表示。

重點二

1. 公式： $\gamma = \frac{\delta}{L} = \frac{P}{AG}$ 其中 AG 稱為抗剪剛度，AG 愈大，愈不易變形。



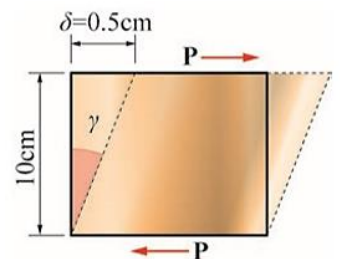
2. 單位：無因次單位

(四) **剛性模數(剪力彈性模數)**：材料在彈性限度內，**剪應力與剪應變成正比**，以 **G** 表示。

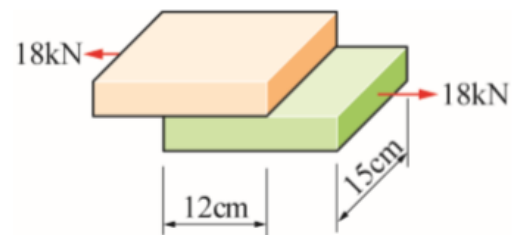
1. 公式： $G = \frac{\tau}{\gamma}$

2. 單位： kgf/cm^2 ， $\text{Pa}=\text{N/m}^2$ ， $\text{psi}=\text{lb/in}^2$

例 某一材料之剛性模數 G 為 $0.84 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ，承受一剪力 P 作用後，產生如圖 10-10 所示之變形量，試求該材料承受剪應力 τ 之大小？



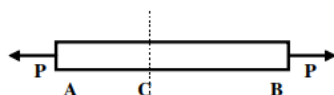
例 如圖 10-11 所示，有二塊材質相同板塊，相互緊密接合搭接，若材料之剛性模數 $G = 50 \text{ GPa}$ ，此板塊在外力 18 kN 作用下，試求材料之剪應變 γ 應為若干？



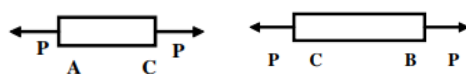
二、剪應力與正交應力

(一) **單軸向**應力之分析：

1. **垂直斷面**的正應力：



在 C 點處垂直切開



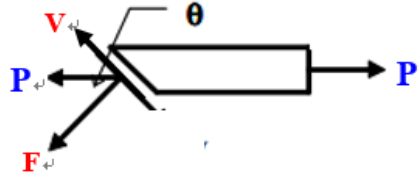
斷面**正向力**為 **P**；斷面**剪力**為**零**；斷面面積：**A**

正應力： $\sigma = \frac{P}{A}$ 剪應力： $\tau = 0$

2. **傾斜斷面**的**正交應力**、**剪應力**



在 C 點處垂直切開



斜斷面正向力： $F = P \cdot \cos\theta$ 斜斷面剪力： $V = P \cdot \sin\theta$ 斜斷面面積： $A_s = \frac{A}{\cos\theta}$

重點三

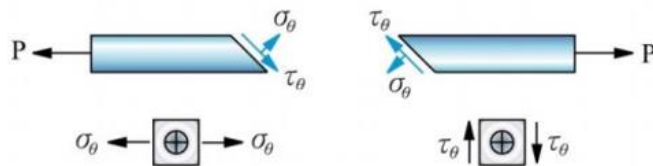
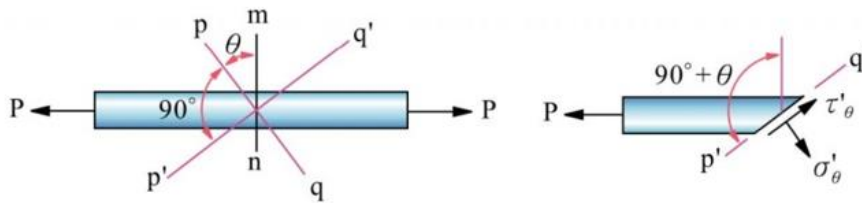
(1) 正交應力： $\sigma_n = \frac{F}{A_s} = \frac{P \cdot \cos\theta}{\frac{A}{\cos\theta}} = \sigma_x \cos^2\theta$

最大正交應力： $\sigma_{\max} = \sigma_x$ ，此時 $\theta = 0^\circ$

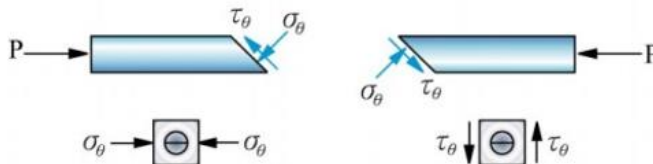
(2) 剪應力： $\tau = \frac{V}{A_s} = \frac{P \cdot \sin\theta}{\frac{A}{\cos\theta}} = \sigma_x \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta$

最大剪應力： $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_x$ ，此時 $\theta = 45^\circ$

(3) 餘應力： $\sigma_n + \sigma'_n = \sigma_x$ $\tau'_n = -\tau$ 其中 p'q' 斷面上的 σ'_n 與 τ'_n



(a) 正值之正交應力與剪應力 ※ τ_θ 對斷面產生順時針為(+)



(b) 負值之正交應力與剪應力 ※ τ_θ 對斷面產生逆時針為(-)

例

如圖 10-14 所示，一矩形斷面桿件，兩端受軸向力 $P = 10\text{kN}$ 之拉力，若其斷面為 $4\text{cm} \times 5\text{cm}$ ，求與鉛直線成 30° 角之斜面上之：(1) 正交應力及剪應力大小為何？(2) 餘應力與之大小為何？

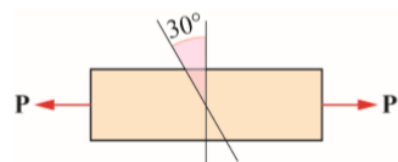


圖 10-14

例 如圖 10-15 所示，一 $5\text{cm} \times 5\text{cm} \times 15\text{cm}$ 之木塊，承受 1000kgf 之拉力荷重，試求在最大剪應力時之平面之正交應力及剪應力各為若干 kgf/cm^2 ？

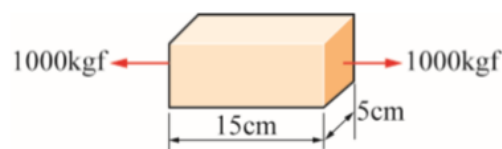
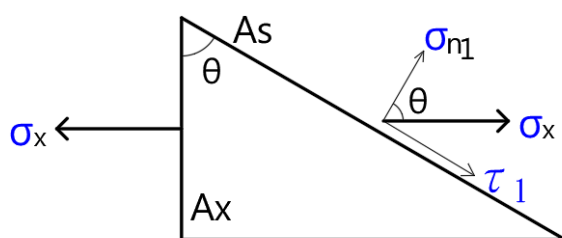


圖 10-15

(二) **雙軸向**之正交應力、剪應力分析

1. **x 軸向**：



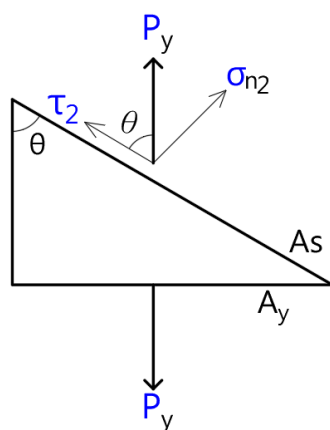
(1) 正交應力：

$$\sigma_{n1} = \sigma_x \cos^2 \theta$$

(2) 剪應力：

$$\tau_1 = \sigma_x \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta$$

2. **y 軸向**：



(1) 正交應力：

$$\sigma_{n2} = \frac{P_y \sin \theta}{\frac{A}{\sin \theta}} = \sigma_y \sin^2 \theta$$

(2) 剪應力：

$$\tau_2 = \frac{P_y \cos \theta}{\frac{A}{\sin \theta}} = -\sigma_y \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\theta \text{ (逆)}$$

3. **雙軸向**： θ : y 軸平行之斷面與斜斷面之夾角（逆：+，順：-）

重點四

(1) 正交應力：

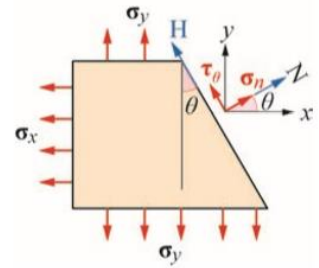
$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta = \sigma_x \times \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sigma_y \times \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta。$$

若 $\sigma_x > \sigma_y$

最大正交應力： $\sigma_{\max} = \sigma_x$ ，此時 $\theta = 0^\circ$

最小正交應力： $\sigma_{\min} = \sigma_y$ ，此時 $\theta = 90^\circ$



(2) 剪應力：

$$\tau_\theta + \tau_1 + \tau_2 = \tau_\theta + \sigma_x \sin \theta \cos \theta - \sigma_y \sin \theta \cos \theta = \tau_\theta + (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta$$

$$= \tau_\theta + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0$$

$$\tau_\theta = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta \text{ 抗剪應力 (逆時針)}$$

若 $\sigma_x > \sigma_y$

最大剪應力： $|\tau_{\max}| = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$ ，此時 $\theta = 45^\circ$

最小正交應力： $\tau_{\min} = 0$ ，此時 $\theta = 0^\circ$ 或 90°

若 $\sigma_x = \sigma_y$ ， $\tau_\theta = 0$ ；即無剪力存在

(3) 餘應力

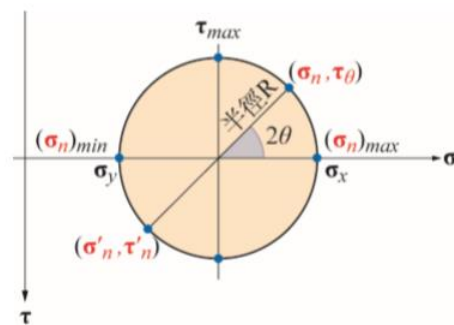
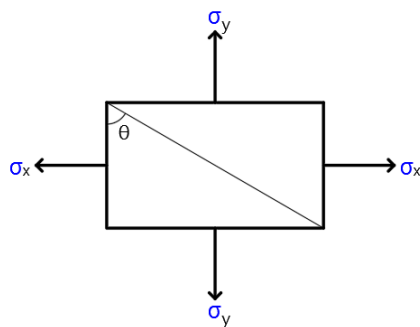
$$\sigma_n + \sigma'_n = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\tau'_n = -\tau_\theta$$

重點五

2. 莫耳圓的應用

假設: 1. $\sigma_x > \sigma_y$ 2. θ : y 軸平行之斷面與斜斷面之夾角（逆：+，順：-）



- (1) σ_n 正向為 +X 軸向； τ_θ 正向為 -Y 軸向。
- (2) 在 σ_n 軸線上標示出 σ_x, σ_y 兩點，此為直徑兩端點
- (3) 圓心 $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ ，半徑 $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ ，畫一圓，此為莫耳圓
- (4) 欲求作用於物體內斜斷面角度 θ 之 σ_n, τ_θ ，由 +X 軸逆轉 2θ 角與莫耳圓相交的坐標點 (σ_n, τ_θ) ，餘應力為直徑對應另一點 (σ'_n, τ'_n)
- (5) 最大主應力 $\sigma_1 = (\sigma_n)_{\max} = \sigma_x$ ；最小主應力 $\sigma_2 = (\sigma_n)_{\min} = \sigma_y$ ，假設 $\sigma_x > \sigma_y$
- (6) 剪應力最大值為莫耳圓之半徑 $|\tau_\theta| = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$

例 某材料承受雙軸向應力，若 $\sigma_x = 80\text{MPa}$ ， $\sigma_y = -40\text{MPa}$ ，試求在 15° 斜斷面上之：(1) 正交應力 σ_n 及剪應力 τ_θ 大小為何？(2) 餘應力 σ'_n 與 τ'_n 之大小為何？

例 利用雙軸向應力公式及莫耳圓之方法，重解範例 10-7，求與鉛直線成 30° 角斜斷面之

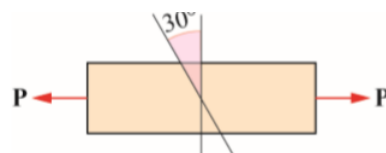


圖 10-21

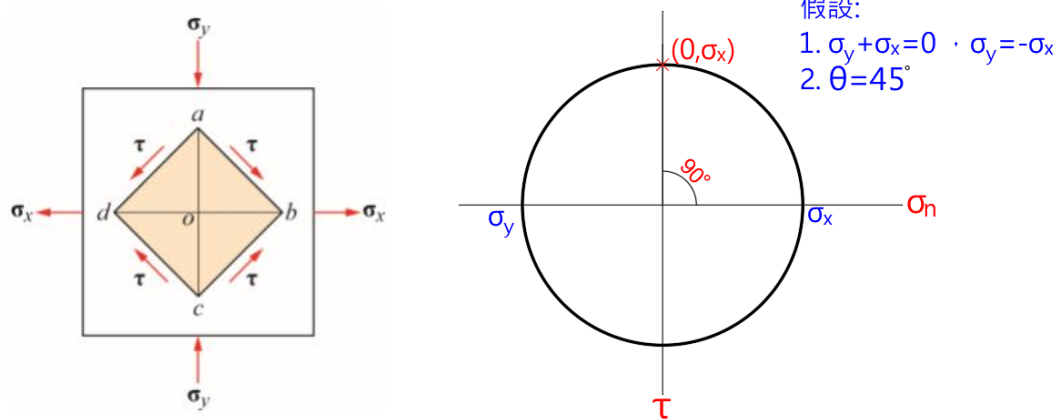
- (1) 正交應力及剪應力大小為何？
- (2) 餘應力 σ'_n 與 τ'_n 之大小為何？（其圖如圖 10-21 所示，兩端受軸向力 $P = 10\text{kN}$ 之拉力，斷面為 $4\text{cm} \times 5\text{cm}$ ）

四、剛性模數與彈性係數之關係

重點六

(一) 純剪

1. 條件： $\sigma_x + \sigma_y = 0$ 且 $\theta = 45^\circ$
2. 斜斷面上之正交應力與剪力： $\sigma_n = 0$ ； $\tau_\theta = \sigma_x$ ，此應力狀態稱作純剪。



(二) 剛性模數與彈性係數之關係

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

例 一圓形桿長 20cm，橫斷面之直徑為 5cm，軸向拉力為 22500kgf，長度增加 0.0325cm，橫斷面之直徑縮短 0.0025cm，試求該材料之剛性模數 G 。

(三) 三種彈性係數之關係

1. 體積彈性係數： $E_V = \frac{E}{3(1-2\mu)}$

2. 剛性模數： $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

3. 三種彈性係數之關係：

$$E = \frac{9E_V G}{3E_V + G}$$

例 若某材料之楊氏係數為 E ，體積彈性係數為 E_V ，剛性模數為 G 。

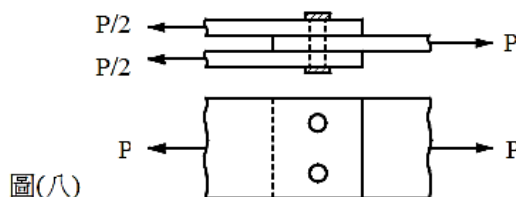
試問：(1) 若 $G = \frac{2E}{5}$ 時，求 E_V 與 E 兩者之關係式。

(2) 若 $G = \frac{2E}{5}$ 時，求蒲松比 ν 之值。

力學下冊 第十章剪應力與正交應力 96-108 年歷屆考題集錦

96>統測 1

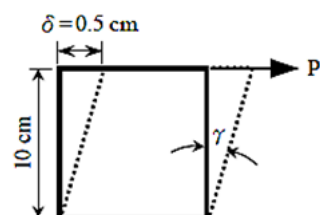
34. 使用兩根直徑皆為 16mm 之螺栓接合三塊厚度皆為 20mm 之鋼板，如圖(八)所示。若不考慮鋼板之間的摩擦力，當拉力為 $P=12000\text{kgf}$ ，則每支螺栓所承受的平均剪應力約為：(請選最接近值)
- (A) 1500kgf/cm^2 (B) 3000kgf/cm^2 (C) 4500kgf/cm^2 (D) 6000kgf/cm^2



圖(八)

97>統測 2

34. 某一材料之剛性模數 (modulus of rigidity) G 為 $0.84 \times 10^6\text{kgf/cm}^2$ ，承受一剪力 P 作用後，產生如圖(十)所示之變形量，求該材料所受平均剪應力 τ 之大小？
- (A) $\tau = 4.2 \times 10^3\text{kgf/cm}^2$
 (B) $\tau = 4.2 \times 10^4\text{kgf/cm}^2$
 (C) $\tau = 4.2 \times 10^5\text{kgf/cm}^2$
 (D) $\tau = 4.2 \times 10^6\text{kgf/cm}^2$



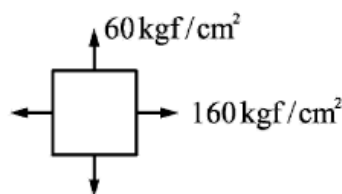
98>統測 3

3. 有一彈性材料受剪力作用後產生 0.006 弧度之剪應變，已知該材料的彈性剪力模數 G 為 $3 \times 10^5\text{kgf/cm}^2$ ，則施加之剪應力為：
- (A) 200kgf/cm^2 (B) 500kgf/cm^2 (C) 1500kgf/cm^2 (D) 1800kgf/cm^2

00>統測 4

10. 某平面元素應力如圖(九)所示，下列敘述何者不正確？

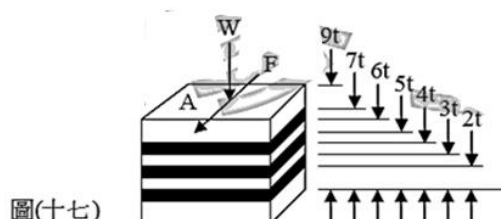
- (A) 160kgf/cm^2 為最大主應力
 (B) 60kgf/cm^2 為最小主應力
 (C) 出現主應力面與出現最大剪應力面之夾角為 45°
 (D) 最大剪應力為 100kgf/cm^2



圖(九)

00>統測 5

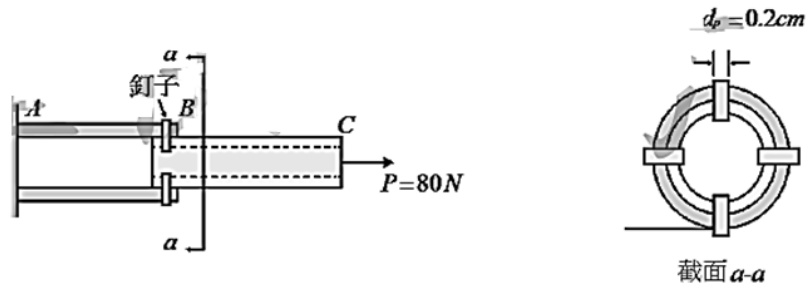
20. 某種橋樑減振用支撐墊，由四片方形鋼板及三片方形黑色橡膠，穿插黏結而成如圖(十七)所示。各片鋼板及橡膠平面面積皆為 A ，除上下鋼板厚度為 $2t$ ，其餘鋼板及橡膠厚度皆為 t ，下鋼板固定，上鋼板承受 W 之垂直載重及 F 之水平力，此時最下層橡膠所承受之平均水平剪應力為：
- (A) 依遞減原理，其上表面是 $3F/(9A)$ ，下表面則是 $2F/(9A)$ ，平均是 $2.5F/(9A)$
 (B) 依合力遞減原理是 $2.5\sqrt{W^2+F^2}/(9A)$
 (C) 其上表面是 $7F/(9A)$ ，下表面則是 $6F/(9A)$ ，平均是 $6.5F/(9A)$
 (D) F/A



圖(十七)

02>統測 6

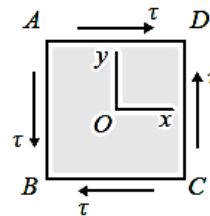
15. 如圖(十一)所示，桿件 ABC 是由 AB 管及 BC 管構成，在 B 處利用四根釘子連接，四根釘子之直徑 d_p 均為 0.2 cm ，在 C 點受到拉力 $P=80\text{ N}$ 作用。假設管壁間之摩擦力不計，則每根釘子平均承受之剪應力 τ 為何？
 (A) 154 N/cm^2 (B) 231 N/cm^2 (C) 616 N/cm^2 (D) 637 N/cm^2



圖(十一)

02>統測 7

16. 如圖(十二)所示之平面應力元素 (stress element) $ABCD$ ，其楊氏模數 (Young's modulus) $E=2 \times 10^4\text{ N/cm}^2$ ，蒲松比 (Poisson's ratio) $\nu=0.25$ 。未受剪應力 τ 作用時，應力元素為正方形；受剪應力 $\tau=200\text{ N/cm}^2$ 作用後，應力元素上 $\angle ABC$ 的角度變為多少度？
 (A) 88.57°
 (B) 88.89°
 (C) 89.13°
 (D) 89.43°



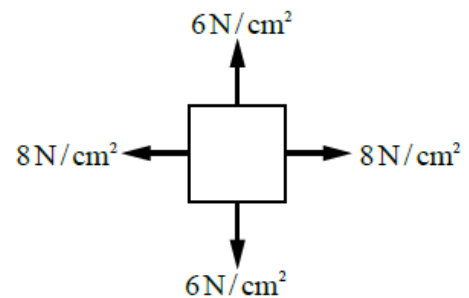
圖(十二)

03>統測 8

1. 一桿件兩端在軸心上受到拉力 P 的作用，若其橫剖面為 A ，所產生的最大剪應力為何？
 (A) $\frac{P}{A}$ (B) $\frac{P}{2A}$ (C) $\frac{2P}{A}$ (D) $\frac{2P}{3A}$

03>統測 9

5. 平面應力元件如圖(三)所示，下列敘述何者正確？
 (A) 最大剪應力為 7 N/cm^2
 (B) 發生最大正剪應力時，軸向應力為 1 N/cm^2
 (C) 發生最大正剪應力時，傾斜角度為 37°
 (D) 最大剪應力為 1 N/cm^2



圖(三)

03>統測 10

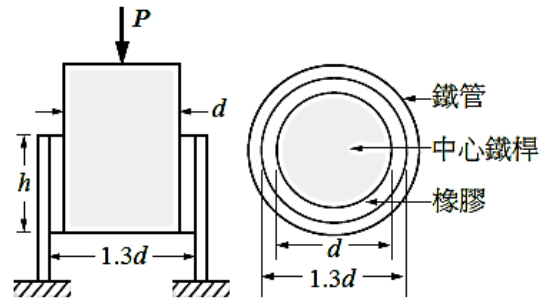
20. 一個等向性之線彈性材料，楊氏模數 $E=500\text{ kN/cm}^2$ ，蒲松比 (Poisson's ratio) $\mu=0.25$ ，其剪力彈性模數 G 為多少 kN/cm^2 ？
 (A) 150 (B) 200 (C) 250 (D) 300

04>統測 11

13. 圖(十一)中之結構，中心是直徑為 d 的鐵桿，外圍是內徑為 $1.3d$ 的鐵管，鐵桿與鐵管之間用高度為 h 的橡膠圓柱結合。中心鐵桿與鐵管視為剛體，而橡膠的剪力模數為 G ，蒲松比為 ν 。求中心鐵桿受到力量 P 作用時，中心鐵桿下降位移約為多少？

- (A) $\frac{0.15P}{\pi(1+\nu)Gd}$
 (B) $\frac{2Ph}{\pi(1+\nu)Gd^2}$
 (C) $\frac{0.15P}{\pi Gh}$
 (D) $\frac{0.6P}{\pi Gd}$

圖(十一)

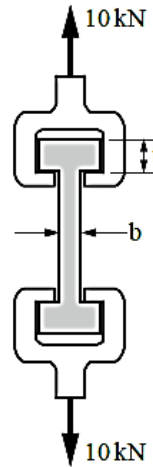


05>統測 12

20. 一木材試片(試片厚為 25 mm)在拉力試驗機受到 10 kN 的拉力，如圖(十八)所示；若木材的容許正向拉應力為 $(\sigma_t)_{\text{allow}} = 16 \text{ MPa}$ ，容許剪應力為 $\tau_{\text{allow}} = 2.0 \text{ MPa}$ ，欲使木材試片恰達到前述要求，則所需尺寸 b 及 t 分別為何？

- (A) $b = 15 \text{ mm}$; $t = 200 \text{ mm}$
 (B) $b = 15 \text{ mm}$; $t = 100 \text{ mm}$
 (C) $b = 25 \text{ mm}$; $t = 200 \text{ mm}$
 (D) $b = 25 \text{ mm}$; $t = 100 \text{ mm}$

圖(十八)

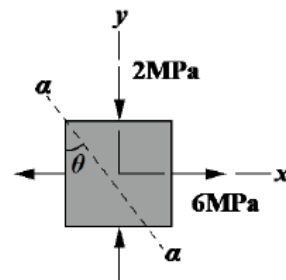


07>統測 13

8. 如圖(六)所示之雙軸應力元素(stress element)，應力元素上有一傾斜面 $a-a$ ，其與垂直線的夾角為 θ 。若欲使傾斜面 $a-a$ 上只有剪應力 τ ，而無正向應力 σ_n 作用，則 θ 角度與傾斜面 $a-a$ 上剪應力 τ 應為何？

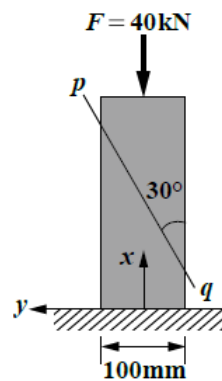
- (A) $\theta = 60^\circ$, $\tau = 2\sqrt{3} \text{ MPa}$
 (B) $\theta = 45^\circ$, $\tau = 2\sqrt{2} \text{ MPa}$
 (C) $\theta = 45^\circ$, $\tau = 4 \text{ MPa}$
 (D) $\theta = 30^\circ$, $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ MPa}$

圖(六)



07 統測>14

16. 截面為 $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ 之正方形截面桿件受到壓力 $F = 40\text{ kN}$ 作用，如圖(十四)所示，斜截面 pq 上之正交應力 σ_n ，剪應力 τ 為何？
- (A) $\sigma_n = 1\text{ MPa}$ (壓)， $\tau = \sqrt{3}\text{ MPa}$
 (B) $\sigma_n = 2\text{ MPa}$ (壓)， $\tau = \sqrt{3}\text{ MPa}$
 (C) $\sigma_n = 2\sqrt{3}\text{ MPa}$ (壓)， $\tau = -\sqrt{3}\text{ MPa}$
 (D) $\sigma_n = 3\text{ MPa}$ (壓)， $\tau = -\sqrt{3}\text{ MPa}$

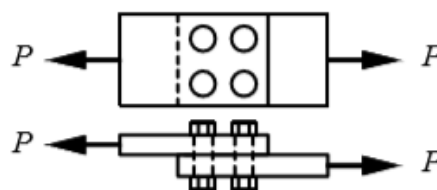


圖(十四)

08 統測>15

13. 如圖(四)所示，兩塊鋼板由四根直徑為 20 mm 的螺栓接合，若其作用拉力 $P = 2000\pi\text{ kgf}$ ，則每支螺栓所受之平均剪應力大小為：
- (A) 500 kgf/cm^2
 (B) 1000 kgf/cm^2
 (C) 1500 kgf/cm^2
 (D) 2000 kgf/cm^2

圖(四)



08 統測>16

15. 有一均質、等向、線彈性材料之圓形截面的桿件，長為 50 cm ，截面直徑為 4 cm ，在桿件兩端分別承受一均勻軸向拉力 $2000\pi\text{ kgf}$ 的作用，長度增加 0.04 cm ，截面直徑縮短 0.0008 cm ，則該桿件之剛性模數 G 為：
- (A) 625000 kgf/cm^2
 (B) 250000 kgf/cm^2
 (C) 50000 kgf/cm^2
 (D) 500 kgf/cm^2