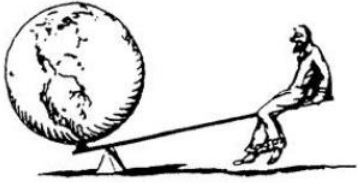


一、力矩：力線對某定點產生旋轉力(滑動向量)

重點一

(一)力矩存在要素：1. 力大小與力臂長短，2. 力矩中心，3. 方向性。

如何衡量力矩：以阿基米德之槓桿原理說明，(由施力點到支點的距離)與(所施力量)的乘積，等於(重物置放點到支點的距離)與(重物重量)之乘積。



$$M = F \times d \text{ (力} \times \text{力臂)}$$

單位：N · m

旋轉方向：以順時針；逆時針表示，無上下左右之分

日常生活中應用：獨輪車、鋁罐拉環、開門...



重點二

(二)力矩原理：一力之力矩，等於分力之力矩和。

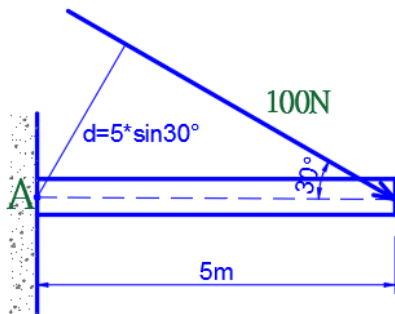
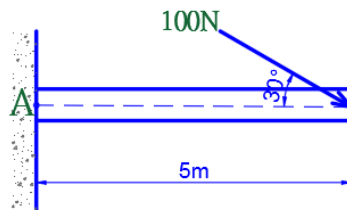
$$\sum R \times d = F_1 \times d_1 + F_2 \times d_2$$



(三)力矩特性

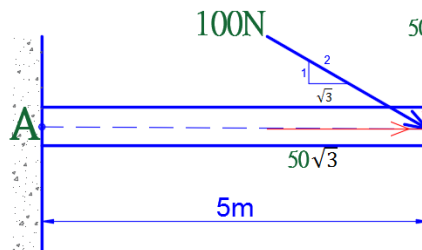
1. 施力點可沿其力作用線任意移動，而不改變力矩大小(力矩大小與施力作用線有關)
2. 力作用線通過力矩中心(轉軸)時，力矩為零(力臂為零)
3. 力作用線與轉軸成平行時，力矩為零(無效力矩)
4. 力臂不易求得時，應將力分解為垂直與水平分力，再求二分力之力矩和(力矩原理)

例



⊕先求有效力臂

$$M = 100 \times \frac{5}{2} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

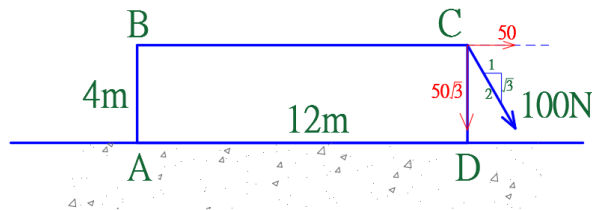
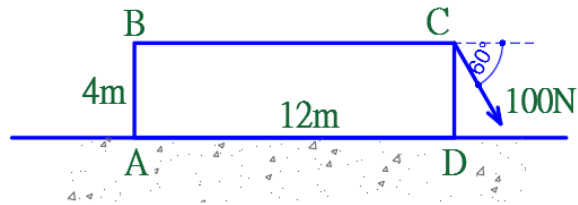


⊕分解有效分力

$$M = 50 \times 5 = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

例

- 例題 3-2 1. 100N 對 A 點產生力矩 M_A ?
2. 100N 與 A 點之垂直距離 d_A ?



1. 分解成有效分力

$$M_A = 50 \times 4 + 50\sqrt{3} \times 12 = 1239.23 \text{ N}\cdot\text{m}$$

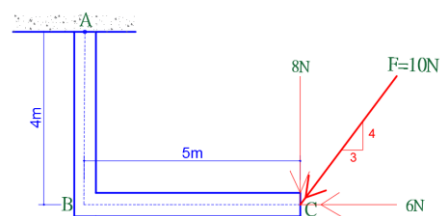
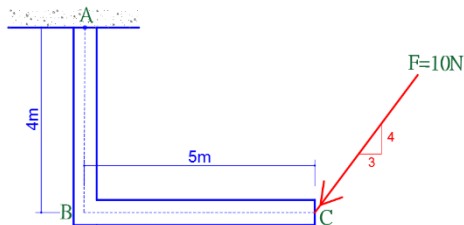
2. 依力矩原理

$$100 \times d_A = 1239.23$$

$$d_A = 12.39 \text{ m}$$

例

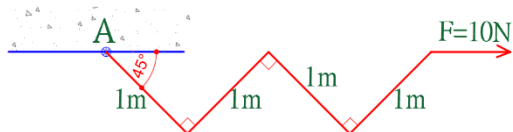
隨堂練習 2. F 對 A 點、B 點之力矩?



$$M_A = 8 \times 5 + 6 \times 4 = 64 \text{ N}\cdot\text{m}$$

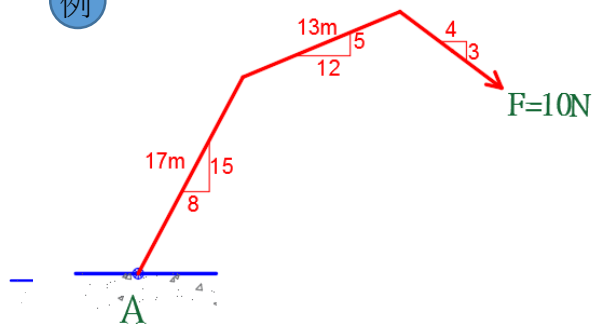
$$M_B = 8 \times 5 + 6 \times 0 = 40 \text{ N}\cdot\text{m}$$

例



F 力之作用線必通過 A 點，依力矩特性，力臂為零， $M_A = 10\text{N} \times 0 = 0$

例



$$1. M_A = 8\text{N} \times (5\text{m} + 15\text{m}) + 6\text{N} \times (8\text{m} + 12\text{m})$$

$$= 280 \text{ N}\cdot\text{m}$$

2. F 力至 A 點之垂距

$$d_A = 280 / 10 = 28\text{m}$$

二、力偶：兩平行力，大小相等，方向相反(自由向量)

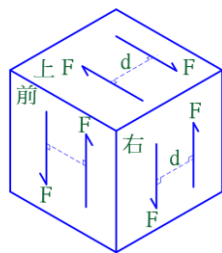
(一)外效應：作用物體不會移動但會轉動。

- 力矩會使物體以力矩中心作順／逆轉動，而力偶同樣也會讓物體產生轉動，所不同的是力偶產生之力矩為自由向量，不管作用於物體任何地方會產生相同效果，此種稱為力偶矩。

重點三

⇒ (二)力偶矩三要素：

1. 力偶矩之大小，
2. 力偶旋轉之指向，
3. 力偶作用平面之方位。

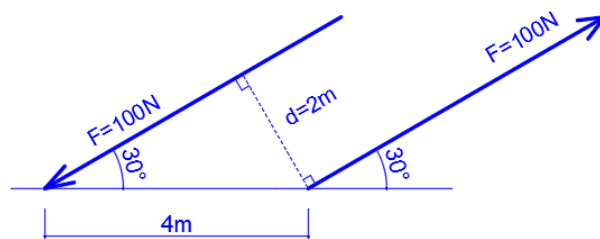
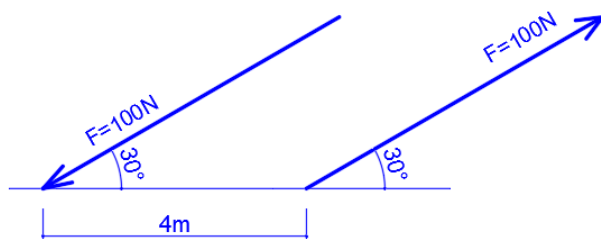


(三)力偶矩特性

1. 力偶矩是由兩不同作用線上之力產生，兩力大小相等方向相反，力偶矩會產生純旋轉效果。(不移動會轉動)
2. 力偶矩為自由向量，因此不管作用於物體任何地方會產生相同效果。(無力矩中心)
3. 力偶矩以向量計算， $C = F \times d$ ，F 為其中單力大小, d 為兩力線之距離。(轉動方向：順/逆)
4. 力偶矩之合成可由力偶系中之向量和求得(同轉向相加；不同轉向相減)

例

例題 3-4、3-5

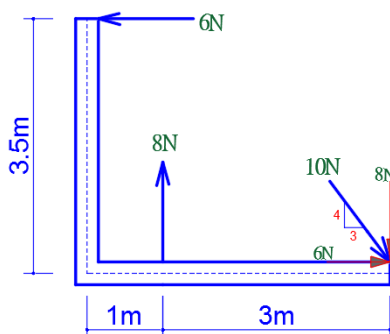
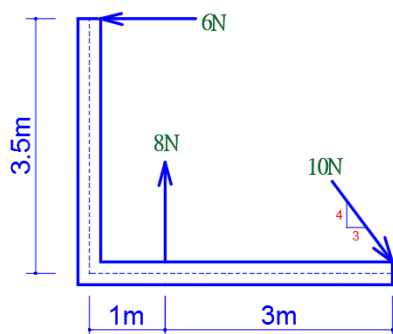


$$1. C = 100 \times 2 = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$2. C = 200 = 2.5 \times F \quad F = 80 \text{ N}$$

例

例題 3-6 求力偶矩和



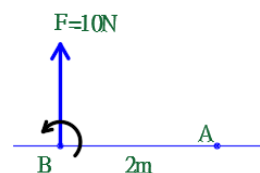
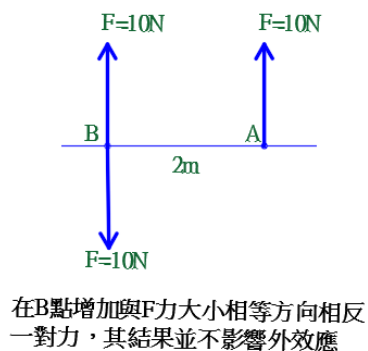
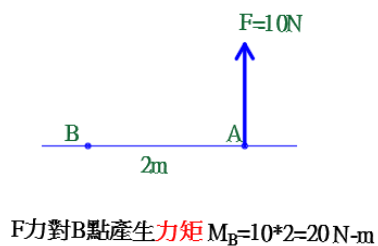
$$C_8 = 8 \text{ N} \times 3 \text{ m} = 24 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright$$

$$C_6 = 6 \text{ N} \times 3.5 \text{ m} = 21 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \curvearrowleft$$

$$C = 24 - 21 = 3 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright$$

重點四 → (四)力之平移：力矩與力偶之轉換

1. 單力 → 單力及一力偶

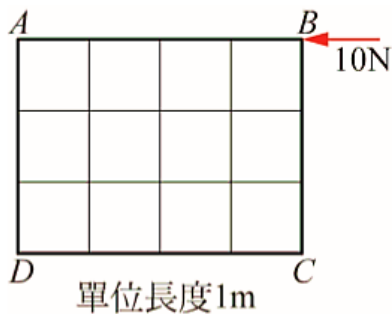


1. 在 B 點產生力偶矩 $C = 10 \times 2 = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$ 及作用點在 B 的 F 力。

2. 單力由 A 點移至 B 點，即力矩轉換為力偶矩。

例

如圖 3-19(a)所示，試將 B 點 10N 之力平移過 D 點之一單力及一力偶。



2. 單力及一力偶 → 單力

例

如何將圖 3-44 所示之 40N 的力移動，即可以此單力代替如圖所示之力系？(1 單力+1 力偶=1 單力)

- (A) 向左移 30cm (B) 向右移 30cm
(C) 向上移 30cm (D) 向下移 30cm

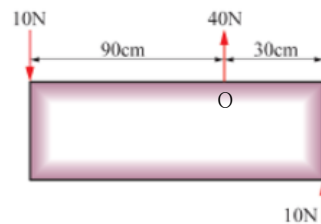


圖 3-44

※利用力矩原理，求出單力位置

$$M_O, \circlearrowleft \quad R=40\text{N} \quad 40 \times D = 10 \times (30+90) \quad D=30\text{cm} \text{ (右側)}$$

三、平行力系之合力(大小，方向，作用點)

(一)力系指存在二力以上之系統；平行力系亦指二力以上互相平行的系統。

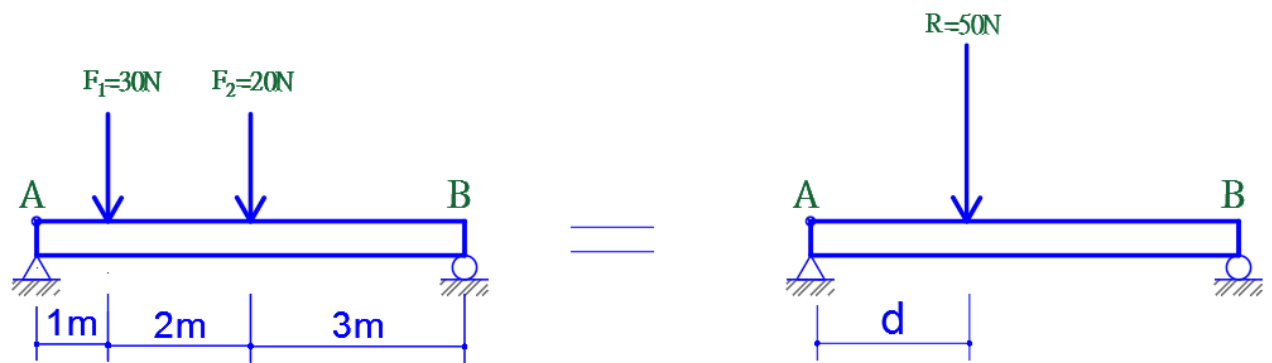
(二)在平行力系中方向只有同向或反向，同向力相加；反向力相減。

(三)平行力系之合力之作用點位置可由力矩原理求得

力矩原理：指定一點為力矩中心，力系中每一力對該力矩中心產生之力矩，予以加總(同轉向則相加，反轉向則相減)得力矩和，此力矩和也會等於力系之合力對該力矩中心產生之力矩。

例

同向之兩力，合力位置：合力必在兩力之間，且靠近較大的力 F_1



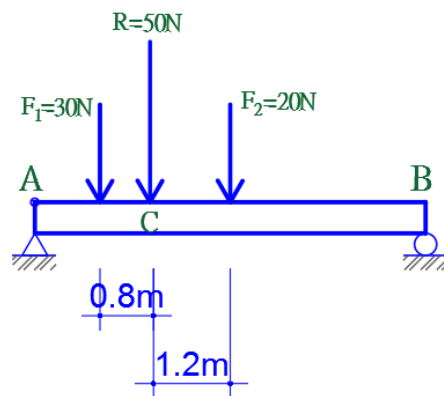
定A點為力矩中心

$$\sum M_A = 30 \times 1 + 20 \times 3 = 90 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \curvearrowright$$

合力 $R=30+20=50\text{N}$

$$M_A = 50 \times d = 90 \quad \text{得 } d=1.8\text{m}$$

若定距A點 1.8m 處C點為力矩中心



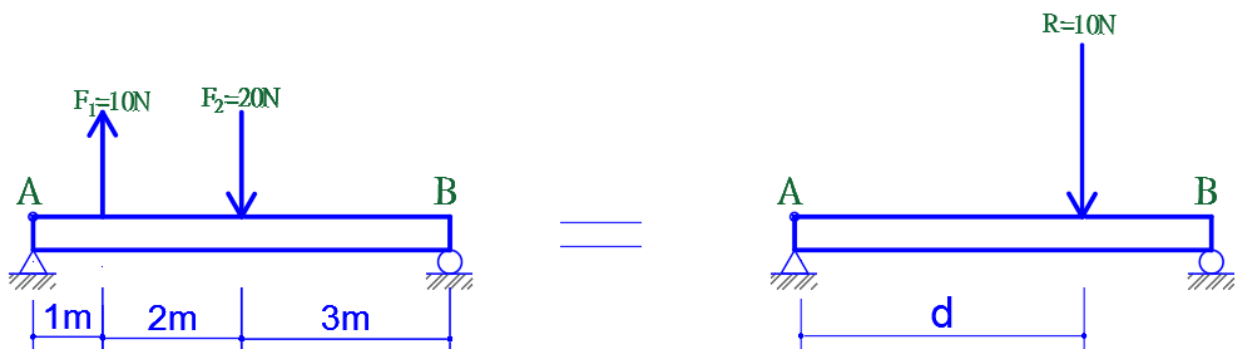
各力對C點之力矩和 $\sum M_C = 30 \times 0.8 \curvearrowright - 20 \times 1.2 \curvearrowright = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$

合力R對C點之力矩 $M_B = 50 \times 0 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$

※合力位置在力系中各力產生力矩和為零處。

例

反方向之兩力，合力位置：**合力在較大力 F_2 之外側**



定A點為力矩中心

$$\sum M_A = 20 \times 3 - 10 \times 1 = 50 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

合力 $R = 20 - 10 = 10 \text{ N}$

$$M_A = 10 \times d = 50 \quad \text{得 } d = 5 \text{ m}$$

重點五 → 四、平行力系之特性：

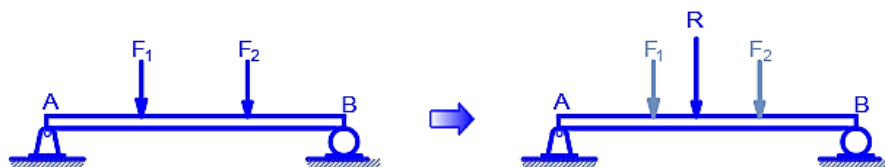
1. 合力 $R \neq 0$ ，則合力為一單力
2. 合力 $R = 0$ ， $\sum Mo \neq 0$ ，則合力為一力偶
3. 合力 $R = 0$ ， $\sum Mo = 0$ ，則合力為零(受力物體處於平衡狀態)

[隨堂練習]：2,3 題

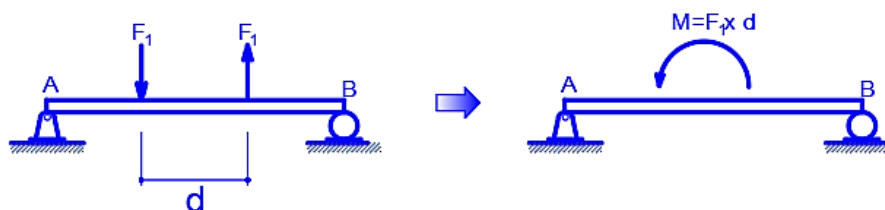
五、平行力系型態

1. 梁上平行力載重型式：可轉換成單力或力偶

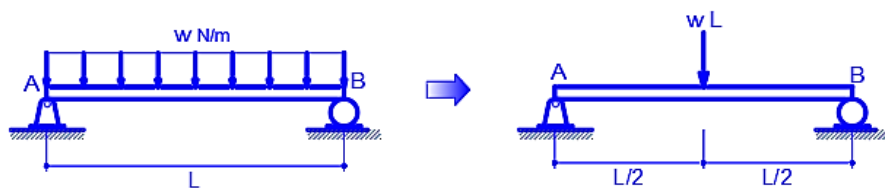
(1) 集中載重



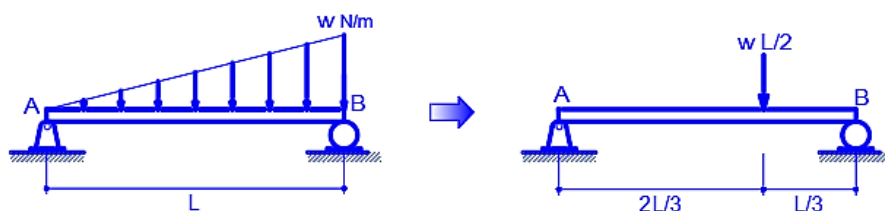
(2) 力偶矩



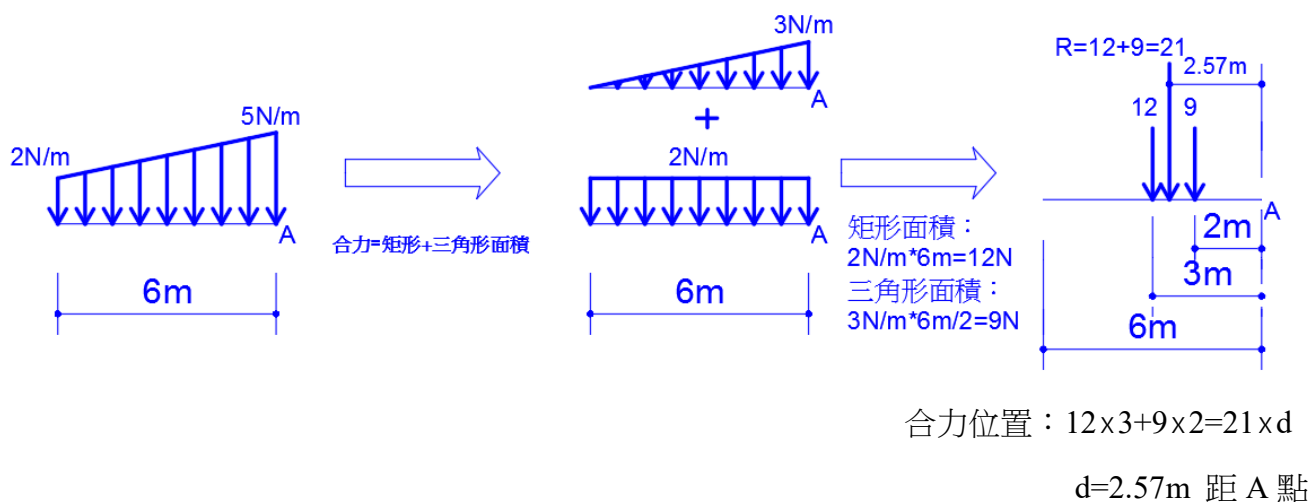
(3) 均佈載重



(4) 均變載重



※複合式力：結合 3,4 形態



[隨堂練習]：P 3－2 6

() 15. 如圖 3-50 所示之樑，合力距 A 支承點多少公尺？

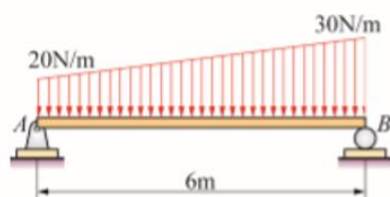


圖 3-50

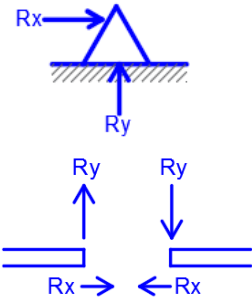
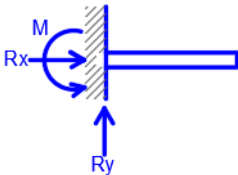
六、平行力系平衡之分析(求支撐點之反力)

- (一)所謂「平衡」：指物體在力系作用下呈靜止不動 (包括不轉動)。
- (二)支點反力沒有一定大小，要看與作用力達成平衡而定。
- (三)共點力系平衡條件： $\sum F_x = 0$ 且 $\sum F_y = 0$ 兩平衡方程式可解出兩未知力。
- (四)平行力系平衡條件： $\sum F_y = 0$ 且 $\sum M_o = 0$ (無力偶矩產生) 兩平衡方程式可解出兩未知力。
- (五)解平衡方程式時，
 1. 先判斷其支承反力方向，若無法判別時，先假設向上力為(+)號；向下力為(-)號；
 2. 計算力矩時，順時針為(+)號；逆時針為(-)號。

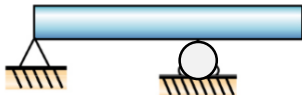
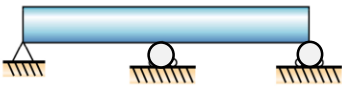
※記住力或力矩並沒有正負值，負值代表與當初假設方向相反。

(六)梁及支撐點型式(課本 P28)

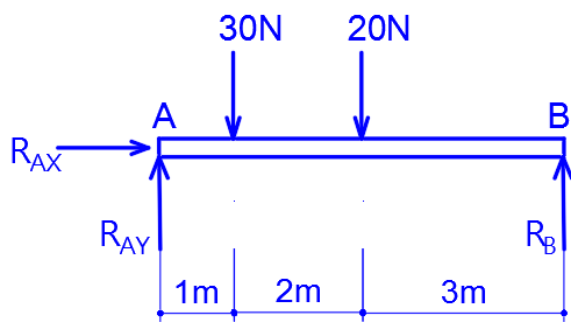
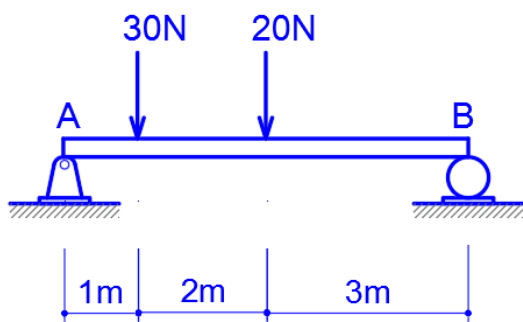
支承型式	自由體圖	可抵抗外力型式	反力數
------	------	---------	-----

滾支承 		只可抵抗垂直力 (存在 Y 軸向未知力)	1
鉸支承  鉸接 		可抵抗斜向力 (存在 X,Y 軸向未知力) ※若是平行力系，則只存在 Y 軸向未知力	2
固定支承 		可抵抗斜向力及力矩或力偶矩 (存在 X,Y 軸向未知力及彎矩) ※若是平行力系，則只存在 Y 軸向未知力及彎矩	3

梁型式

簡支梁  鉸支承 + 滾支承	懸臂梁  固定支承	外伸梁  鉸支承 + 滾支承
連續梁  鉸支承 + 滾支承x2	束限制梁  固定支承+滾支承	固定梁  固定支承x2

例題 3-11 求 A,B 兩支點之反力?



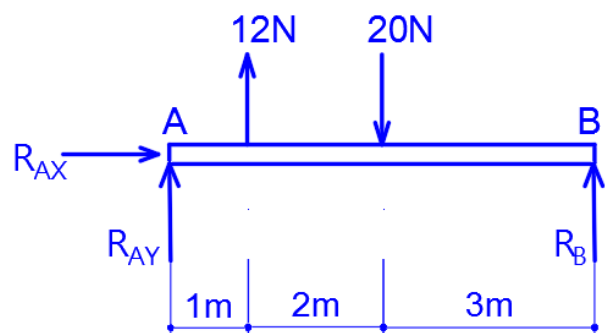
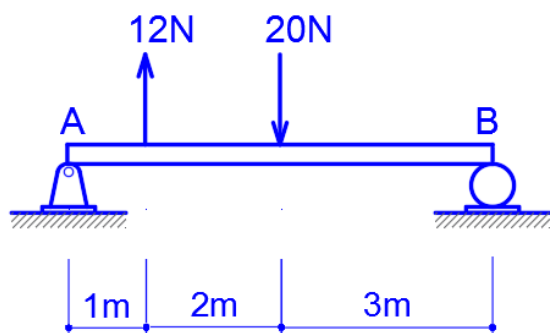
[分析]：定力矩中心時，以支點反力數多的為力矩中心

$$\sum M_A = 30 \times 1 + 20 \times 3 - R_B \times 6 = 0 \quad R_B = 15\text{N} \quad \uparrow$$

$$\sum F_Y = 30 + 20 - 15 - R_{AY} = 0 \quad R_{AY} = 35\text{N} \quad \uparrow$$

例

例題 3-12 求 A,B 兩支點之反力？



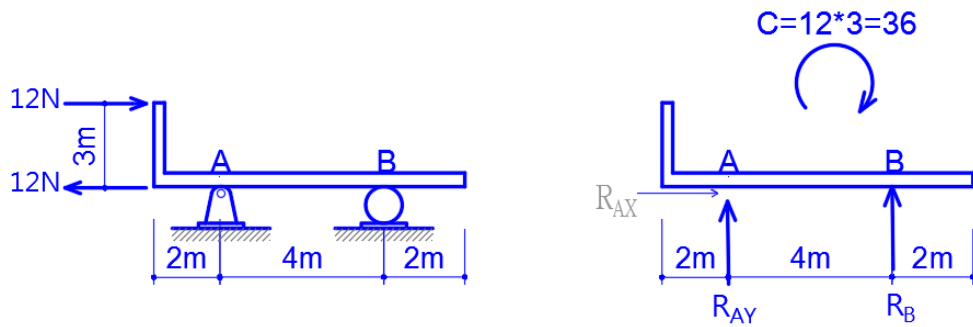
$$[\text{解}] : \sum M_A = 20 \times 3 - 12 \times 1 - R_B \times 6 = 0 \quad R_B = 8\text{N} \quad \uparrow$$

$$\sum F_Y = 20 - 12 - 8 - R_{AY} = 0 \quad R_{AY} = 0\text{N}$$

因水平向無受力，故 $R_{AX} = 0\text{N}$

例

例題 3-15 求支點反力

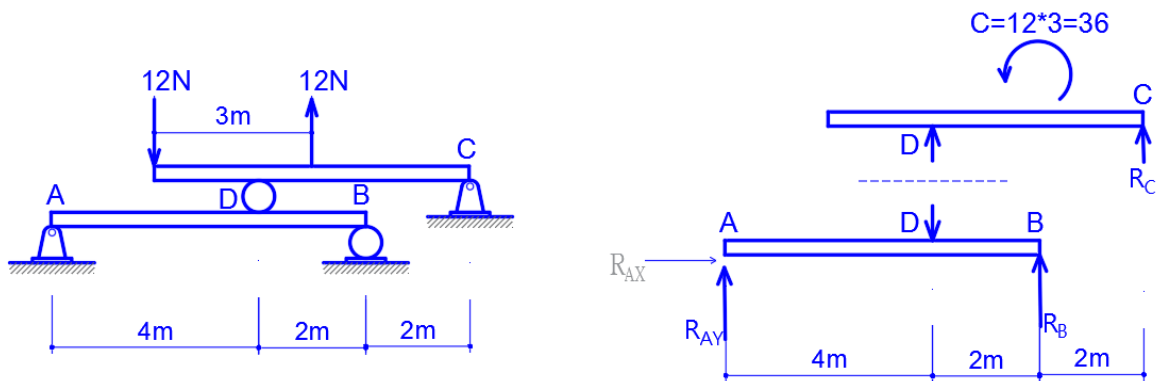


[解]： $\sum M_A = 36 - R_B \times 4 = 0 \quad R_B = 9\text{N} \quad \uparrow$

$\sum F_Y = 9 + R_{AY} = 0 \quad R_{AY} = 9\text{N} \quad \downarrow$

例

例題 3-16 求支點反力



[分析]：疊梁型式應切開連結點即 D 滾支承，切開後會產生對上梁與對下梁的反力，此兩反力應是大小相等方向相反，先求出上梁反力，再作為施於下梁的作用力。

上梁部份：

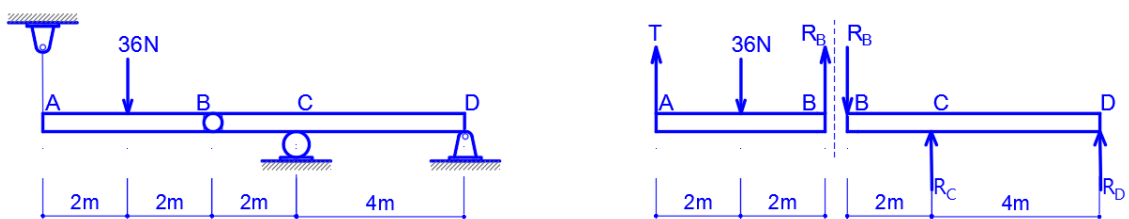
$\sum M_D = 36 + R_C \times 4 = 0 \quad R_C = -9\text{N} \quad \downarrow \quad \sum F_Y = -9 + R_D = 0 \quad R_D = 9\text{N} \quad \uparrow$

下梁部份：

$\sum M_A = -9 \times 4 + R_B \times 6 = 0 \quad R_B = 6\text{N} \quad \uparrow \quad \sum F_Y = 6 - 9 + R_{AY} = 0 \quad R_{AY} = 3\text{N} \quad \uparrow$

例

例題 3-17 求支點反力



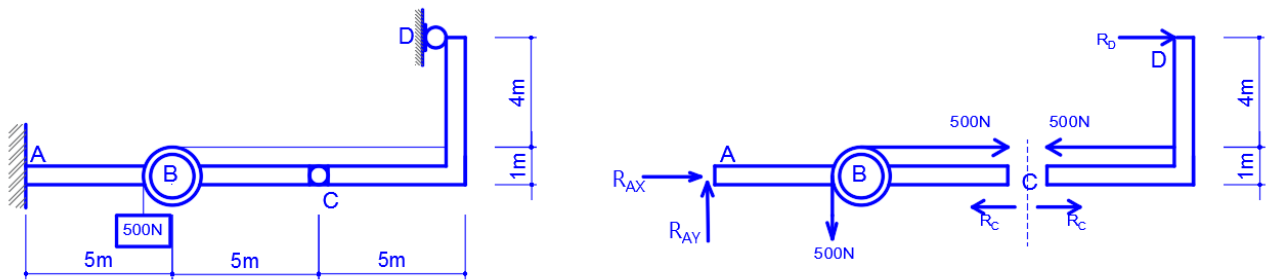
[分析]：切開鉸接後，分析兩邊未知力數，先解未知數少的自由體圖

$$\text{左邊圖：} \sum M_A = 36 \times 2 - R_B \times 4 = 0 \quad R_B = 18\text{N} \uparrow \quad \sum F_Y = 18 + T - 36 = 0 \quad T = 18\text{N} \uparrow$$

$$\text{右邊圖：} \sum M_C = -18 \times 2 - R_D \times 4 = 0 \quad R_D = -9\text{N} \downarrow \quad \sum F_Y = -9 - 18 + R_C = 0 \quad R_C = 27\text{N} \uparrow$$

例 問答與計算

3-5-7



[分析]：切開 C 鉸接點，同一滑輪繩索受力為一致性拉力，而右邊鉸接點分析只存在 F_x 力，無 F_y 力，先解未知數少的右邊自由體圖

$$\text{右邊圖：} \sum M_C = 500 \times 1 - R_D \times 5 = 0 \quad R_D = 100\text{N} \rightarrow \quad \sum F_x = 500 - 100 - R_C = 0 \quad R_C = 400\text{N} \rightarrow$$

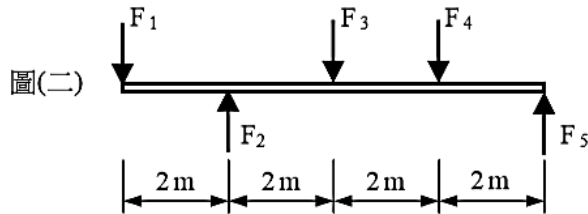
$$\text{左邊圖：} \sum F_x = R_{AX} + 500 - 400 = 0 \quad R_{AX} = -100\text{N} \leftarrow \quad \sum F_y = R_{AY} - 500 = 0 \quad R_{AY} = 500\text{N} \uparrow$$

96-107 年歷屆考題

96 統測>1

24. 一平面平行力系作用於一橫桿，如圖(二)所示。其中 $F_1 = 5 \text{ kN}$; $F_2 = 20 \text{ kN}$; $F_3 = 15 \text{ kN}$, 若該力系平衡，則 F_4 及 F_5 分別應為：

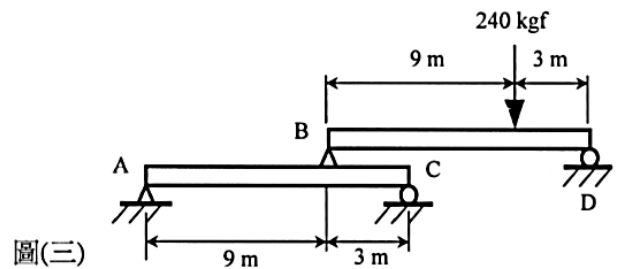
- (A) $F_4 = 0 \text{ kN}$ 、 $F_5 = 0 \text{ kN}$ (B) $F_4 = 5 \text{ kN}$ 、 $F_5 = 5 \text{ kN}$
(C) $F_4 = 10 \text{ kN}$ 、 $F_5 = 10 \text{ kN}$ (D) $F_4 = 15 \text{ kN}$ 、 $F_5 = 15 \text{ kN}$



97 統測>2

24. 一組合梁所受外力如下圖(三)所示，當其維持平衡時，在 A、B、C、D 四點的反作用力，分別為 R_A 、 R_B 、 R_C 、 R_D ，則：

- (A) $4R_C = R_D$
(B) $2R_A = R_B$
(C) $R_D = R_A + R_B + R_C$
(D) $R_B + R_C = R_A + R_D$



98 統測>3

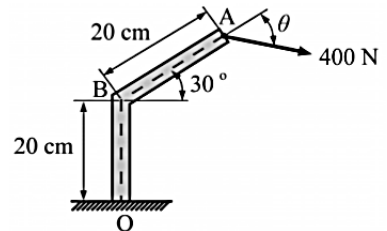
5. 有胖子和瘦子兩個人，用一根長 1.2 m 重量 10 N 的均勻長棒合扛一條重 120 N 的山豬。若兩人分別位於長棒的兩端，且山豬的懸掛點距離胖子 0.45 m 處，則胖瘦兩人所承受的負重比為：

- (A) 8 : 5 (B) 2 : 1 (C) 5 : 3 (D) 9 : 4

98 統測>4

7. 如圖(一)所示，連續剛性構件 OBA 於 A 點承受 400 N 作用力，該作用力與 AB 軸夾角 θ 。當 $\theta = 0$ 度時，求此力對固定端 O 之力矩為何？

- (A) 28.3 N-m
(B) 40.0 N-m
(C) 56.6 N-m
(D) 69.3 N-m



98 統測>5

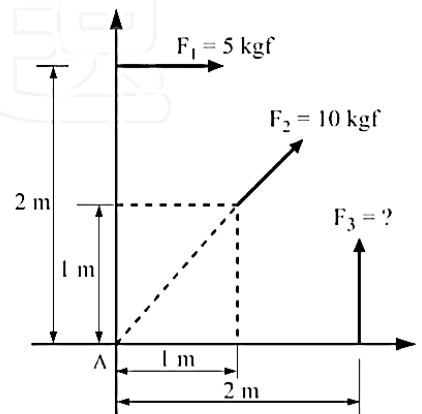
8. 承上題圖(一)，當此力對固定端 O 之力矩為最大值時， θ 角為何？

- (A) 30 度 (B) 45 度 (C) 60 度 (D) 75 度

98 統測>6

11. 如圖(四)所示，平面上有三力分佈，此三力對 A 點之力矩和為 10 kgf-m (逆時針方向)，則下列敘述何者不正確？

- (A) F_1 對 A 點之力矩為 0 kgf-m
 (B) F_2 對 A 點之力矩為 0 kgf-m
 (C) F_3 為 10 kgf
 (D) 三力之合力大小為 $\sqrt{225 + 150\sqrt{2}} \text{ kgf}$

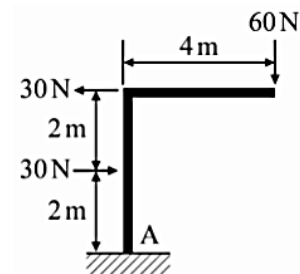


圖(四)

99 統測>7

10. 有一平面力系作用於一剛架 (frame) 上如圖(七)，剛架固定於地面 A 點，合力與 A 點之水平距離為何？

- (A) 1 m
 (B) 2 m
 (C) 3 m
 (D) 4 m

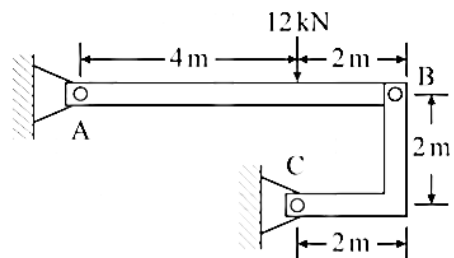


圖(七)

99 統測>8

11. 有一構造如圖(八)，A、C 為鉸支承 (hinge)，B 為銷釘 (pin)，A 點之水平反力 A_x 與垂直反力 A_y 大小各為：

- (A) $A_x = 12 \text{ kN}$ 、 $A_y = 0 \text{ kN}$
 (B) $A_x = 12 \text{ kN}$ 、 $A_y = 6 \text{ kN}$
 (C) $A_x = 6 \text{ kN}$ 、 $A_y = 6 \text{ kN}$
 (D) $A_x = 8 \text{ kN}$ 、 $A_y = 4 \text{ kN}$



圖(八)

01 統測>9

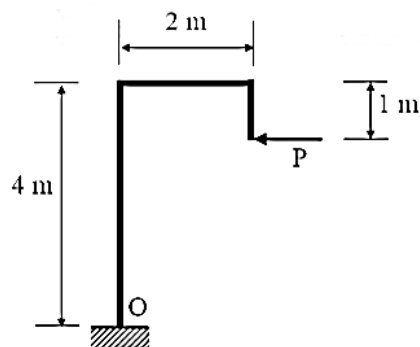
4. 力矩的公式為何？

- (A) 力 $\times$ 力偶 (B) 力 $\times$ 力臂 (C) 力臂 $\times$ 力偶 (D) 力偶 $\div$ 力臂

01 統測>10

6. 如圖 (二) 所示之系統，若作用在自由端的力 $P = 7 \text{ kN}$ ，O 點為固定端，試計算 O 點的力矩值為多少？

- (A) 28 kN-m
 (B) 21 kN-m
 (C) 14 kN-m
 (D) 7 kN-m

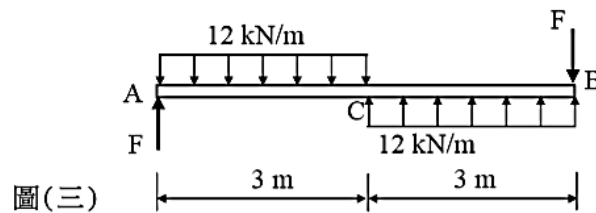


圖(二)

01 統測>11

7. 一剛體桿 AB，長度為 6m，桿上下兩端分別承受一組均佈力組 12 kN/m，如圖(三)所示。若 AB 桿處於平衡狀態，則桿 A、B 兩端之力 F 應為：

(A) 12 kN
(B) 18 kN
(C) 24 kN
(D) 36 kN



圖(三)

02 統測>12

1. 在工程力學中，下列何組中之兩個物理量具有相同的單位？

(A) [力 (Force)]、[力矩 (Moment)] (B) [力矩 (Moment)]、[功 (Work)]
(C) [力 (Force)]、[長度 (Length)] (D) [力 (Force)]、[功 (Work)]

02 統測>13

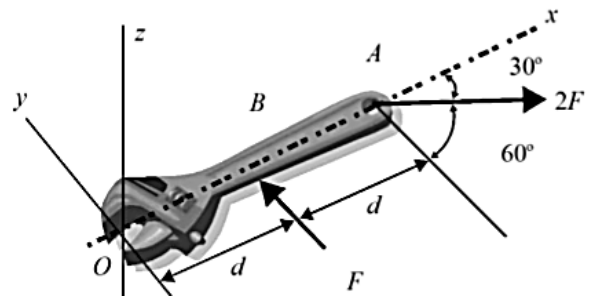
2. 有一人手中握一手機，手掌與手臂成一直線，但與水平面之夾角為 60° 向上，假設手機重量為 W ，手機重心至肩膀關節之水平距離為 d ，則肩膀關節由於該手機重量所承受之力矩為何？(不計手臂重量)

(A) 0 (B) Wd (C) $Wd \sin 60^\circ$ (D) $Wd \cos 60^\circ$

02 統測>14

5. 如圖(三)所示為作用在一個扳手 (wrench) 上之力系。作用力方向均在 $x-y$ 平面內，作用點 A、B 與支點 O 之距離分別為 $2d$ 及 d ，A 點作用力大小為 $2F$ 與 x 軸之夾角為 30° ，B 點作用力大小為 F 與 x 軸垂直。下列敘述何者不正確？

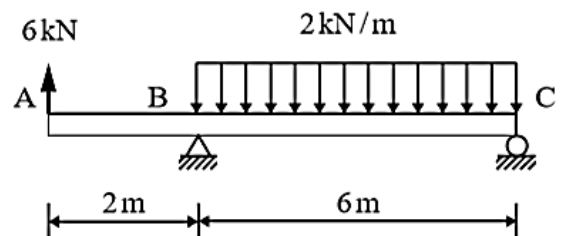
(A) 對 O 點之總合力矩為 Fd (負 z 方向)
(B) 外力之總合力大小為 $2F \cos 30^\circ$ (正 x 方向)
(C) 作用於 A 點之力 $2F$ 單獨對 O 點力矩為 $4Fd$ (負 z 方向)
(D) 以現在的圖面視點看過去，在此力系作用下此扳手會朝順時鐘方向旋轉



03 統測>15

9. 如圖(七)所示之外伸樑，B 點為鉸支承 (hinge)，C 點為滾支承 (roller)，該樑於 A 點承受一集中載重 6 kN 之作用，BC 間承受一均佈載重 2 kN/m，下列敘述何者正確？

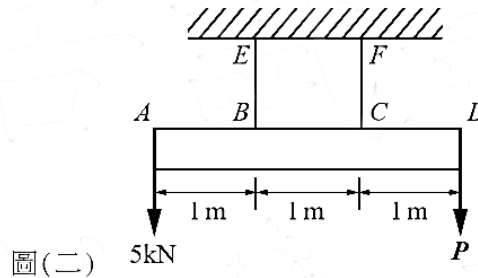
(A) B 點的反力為 6 kN，方向朝下
(B) B 點的反力為 6 kN，方向朝上
(C) C 點的反力為 12 kN，方向朝上
(D) C 點的反力為 8 kN，方向朝上



圖(七)

04 統測>16

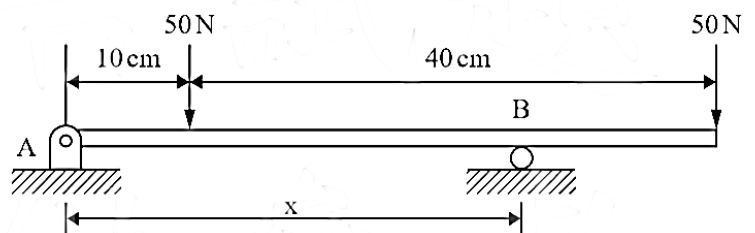
2. 圖(二)中 $ABCD$ 為一均質桿件，重量為 10 kN ，且受外力如圖(二)所示。繩子 BE 與 CF 都只能承受張力，且容許最大張力為 20 kN 。則維持靜止平衡所容許最大作用力 P 為何？
 (A) 5 kN
 (B) 10 kN
 (C) 15 kN
 (D) 20 kN



圖(二)

06 統測>17

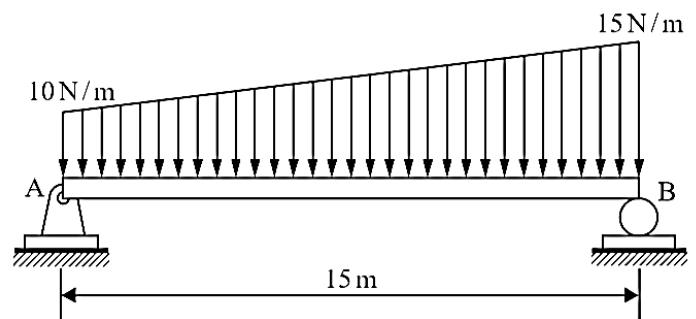
2. 有一梁 AB 受力如圖(二)所示，若 A 點沒有任何反作用力時，求 B 點到 A 點之距離 x 為何？
 (A) 15 cm (B) 20 cm (C) 25 cm (D) 30 cm



圖(二)

06 統測>18

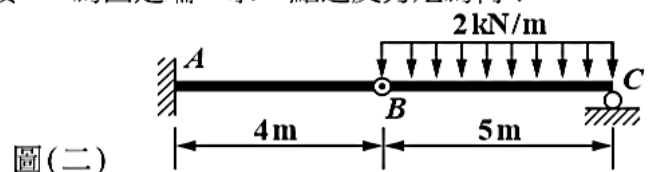
3. 有一簡支梁 AB ，受均變荷重作用，若 A 點至 B 點之荷重變化，如圖(三)所示，求 B 點所受之反力大小為何？
 (A) 100 N (B) 120 N (C) 150 N (D) 200 N



圖(三)

07 統測>19

3. 如圖(二)所示之梁， B 點為鉸接， A 為固定端，求 A 點之反力矩為何？
 (A) 20 kN-m 逆鐘向
 (B) 30 kN-m 逆鐘向
 (C) 65 kN-m 逆鐘向
 (D) 65 kN-m 順鐘向



圖(二)

08 統測>20

2. 下列何者不是力偶三要素？
 (A) 力偶矩的大小
 (B) 力偶作用面之方位(傾度)
 (C) 力偶的轉動指向
 (D) 力偶的合力為零