一、重心、質心與形心

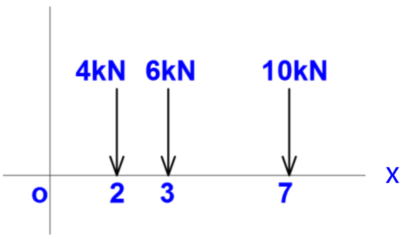
(一)重心位置求法：

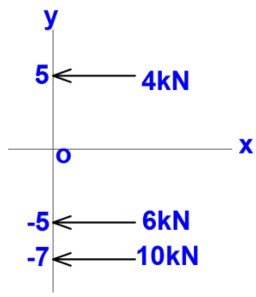
重 1

質點重心或形狀中心之坐標位置：利用力矩原理，求出合力之位置。

1 **例題 8-1** A,B,C 之重量分別為 4kN、6kN、10kN，其平面座標依序為（2，5）、（7，−5）、（3，−7），座標單位為公尺，試求此三質點之**重心座標位置 x 及 y**

[解] ：求重心 X 座標　　　　　　　　求重心 Y 座標





$$20\times\bar{x}=4\times2+6\times3+10\times7$$

$$\bar{x}=\frac{4\times2+6\times3+10\times7}{20}=4.8$$

$$20\times\bar{y}=4\times5-6\times5-10\times7$$

$$\bar{y}=\frac{4\times5-6\times5-10\times7}{20}=-4$$

三質點之重心座標位置 **(4.8 , -4)**

※公式：重心位置 $\bar{x}=\dfrac{\sum W_i\times X_i}{\sum W_i}$　$\bar{y}=\dfrac{\sum W_i\times Y_i}{\sum W_i}$

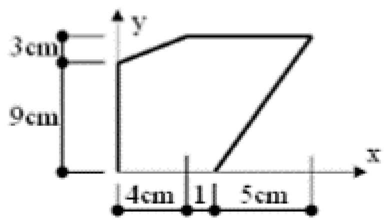
(三) 基本形心種類：

重 2

1.線形心：

(1) 直線：重心位置在線段中心

例題 有均質鐵絲，彎成如右圖所示之形狀，試求鐵絲之重心 位置 x 及 y 各為若干 cm？



[解]：

$$\bar{x}=\frac{\sum l_i\cdot x_i}{\sum l_i}\Rightarrow\bar{x}=\frac{9(0)+5(2)+6(4+3)+13(5+2.5)}{9+5+6+13}=\frac{149.5}{33}=\underline{\underline{4.53\text{ cm}}}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum l_i\cdot y_i}{\sum l_i}\Rightarrow\bar{y}=\frac{9(4.5)+5(9+1.5)+6(12)+13(6)}{9+5+6+13}=\frac{243}{33}=\underline{\underline{7.36\text{ cm}}}$$

※形心位置 $=\left(\dfrac{\sum L_i\times X_i}{\sum L_i},\dfrac{\sum L_i\times Y_i}{\sum L_i}\right)$

(2) 弧線：重心位置

①半圓弧

$$x = y = \frac{2r}{\pi}$$

②1/4 圓弧

$$x = y = \frac{2r}{\pi}$$

③圓弧：取圓心角之一半為θ

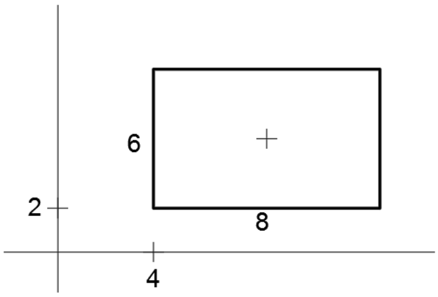
$$\frac{r \times \sin\theta}{\theta}$$ 分母θ: 弳度單位

2.面形心：

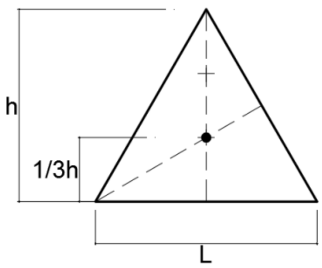
重 3

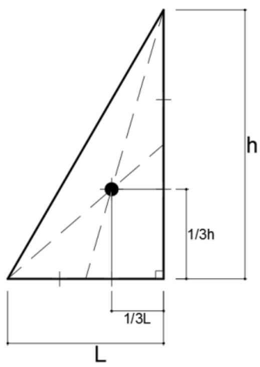
(1) 矩形面：對角線之交點，或相對兩邊中點連線之交點。

※離原點坐標＋形心 $\bar{x}$=4+8/2=8 $\bar{y}$=2+6/2=5



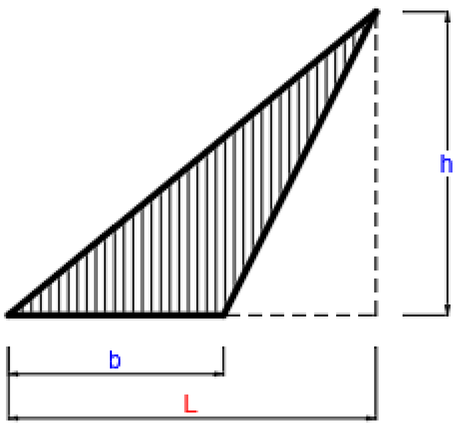
(2) 三角形面：三中線之交點，並位於距底邊高 **1/3h 處**。



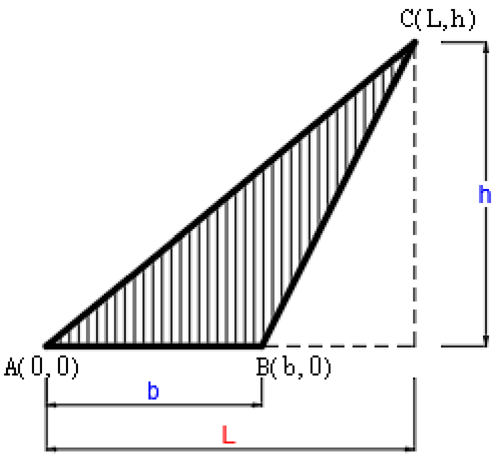


形心（$\frac{h}{3}$，$\frac{h}{3}$）

鈍角三角形之形心

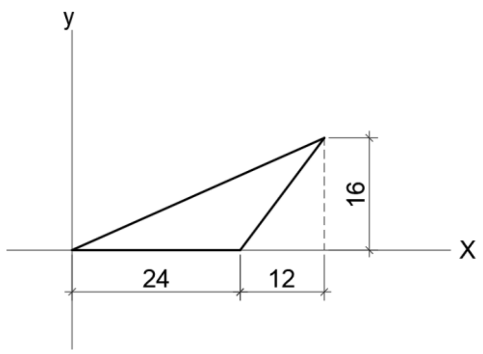


形心（$\frac{L+b}{3}$，$\frac{h}{3}$）

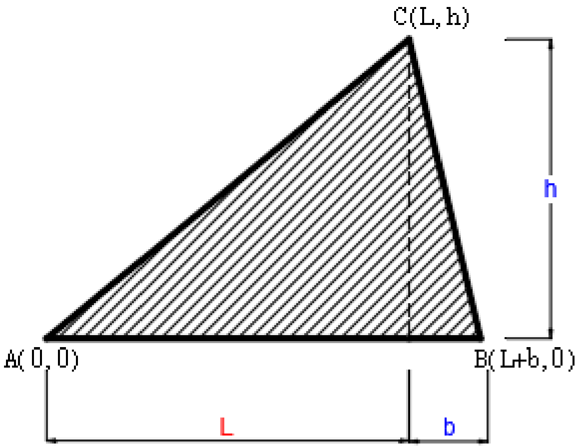


※三座標點平均也可求出形心座標

[例] 求三角形形心位置?

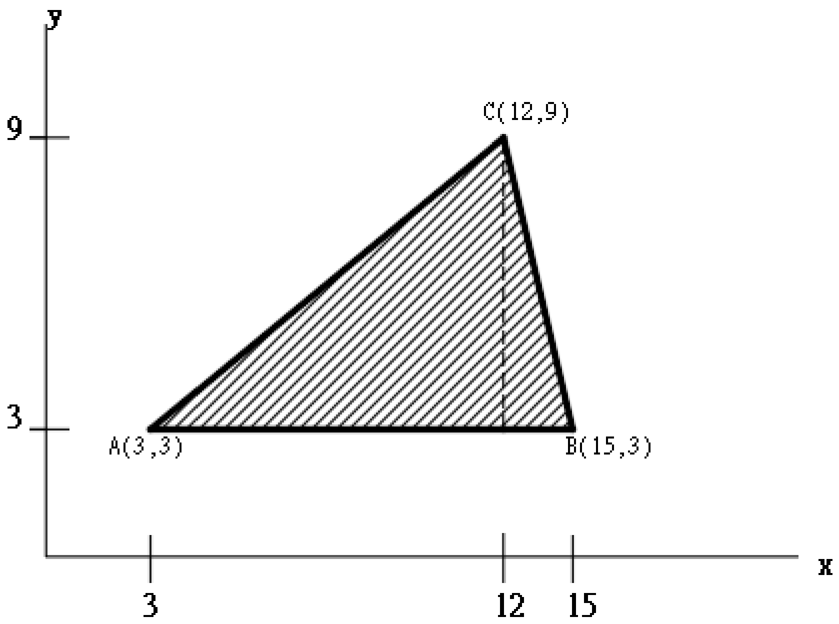


銳角三角形之形心



形心 $\left(\frac{2L+b}{3}, \frac{h}{3}\right)$

[例] 求三角形形心位置?



(3) 扇形面：面形心位置為線形心位置之 2/3 倍

半圓形心 公式 $=\frac{2}{3}\times\frac{2r}{\pi}=\frac{4r}{3\pi}$

圓弧形心 公式 $=\frac{2}{3}\times\frac{r\times\sin\theta}{\theta}=\frac{2r\times\sin\theta}{3\theta}$ 取圓心角之一半為θ

[例]

如圖 8-5 所示，有一均質之扇形板，其圓心角為 60°，半徑長π cm，試求其面積之形心位置 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$ 。

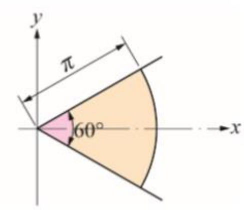


圖 8-5

[解]：

$$\bar{x}=\frac{2}{3}\times\frac{r\sin\theta}{\theta}\ (\theta=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ=\frac{\pi}{6})$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{\pi\sin 30^\circ}{\frac{\pi}{6}}=2\text{ cm}$$

$$\bar{x}=2\text{ cm}$$

3.體形心：參考課本 p9

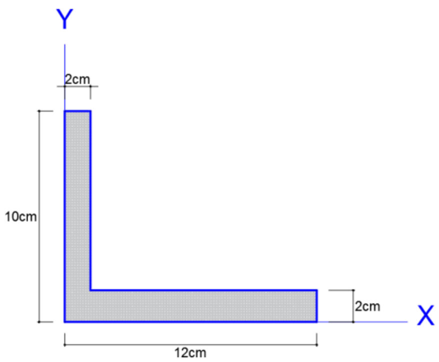
(1) 方形體
(2) 圓柱體
(3) 圓錐體
(4) 半球體

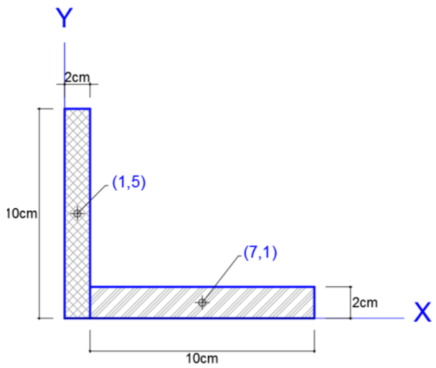
(四) 組合面形心

重 4

※形心位置 $\bar{X}=\frac{\sum A_i\times X_i}{\sum A_i}$ $\bar{Y}=\frac{\sum A_i\times Y_i}{\sum A_i}$

例 8-7 求下圖形心座標位置$\bar{x}$，$\bar{y}$ ？



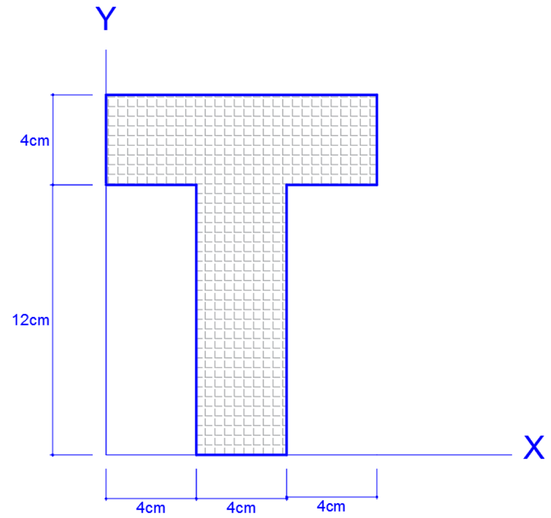


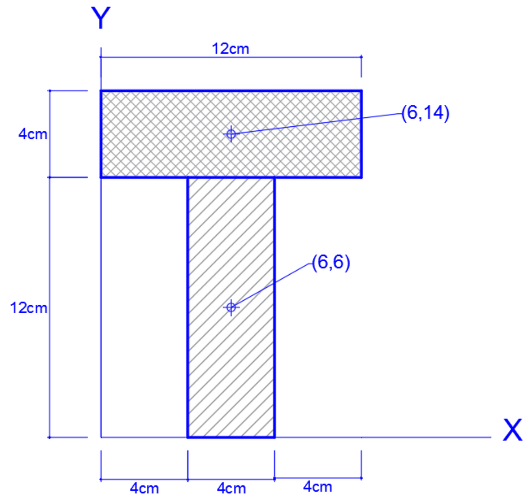
[解] 面積 A1=2x10=20cm^2 A2=10x2=20 cm^2 A1：A2=1：1

形心坐標 (x1,y1)=(1,5) (x2,y2)=(7,1)

$$\bar{X}=\frac{1\times 1+1\times 7}{1+1}=4 \qquad \bar{Y}=\frac{1\times 5+1\times 1}{1+1}=3$$

例 8-8 求下圖形心座標位置$\bar{x}$，$\bar{y}$ ？



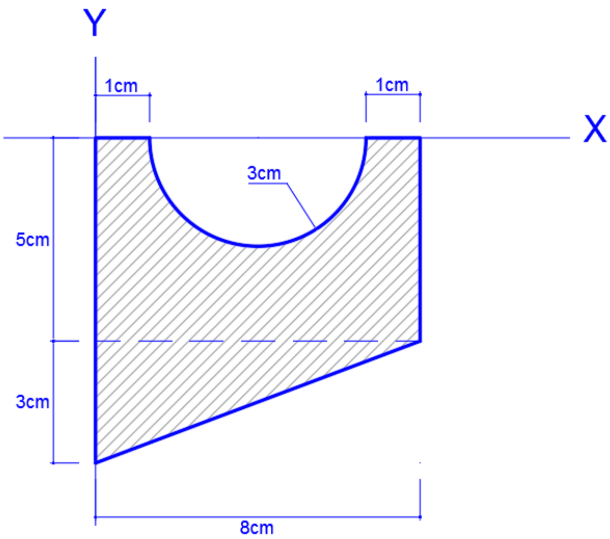


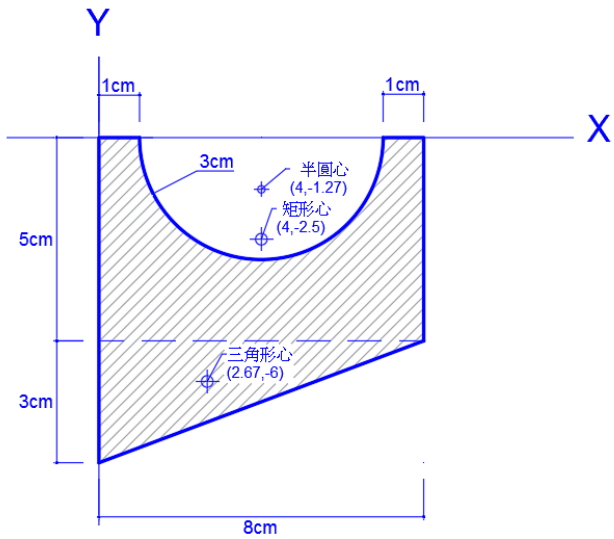
[解] 面積 A1=12x4=48cm^2 A2=4x12=48 cm^2 A1：A2=1：1

形心坐標 (x1,y1)=(6,14) (x2,y2)=(6,6)

$$\bar{X}=\frac{1\times6+1\times6}{1+1}=6 \qquad \bar{Y}=\frac{1\times14+1\times6}{1+1}=10$$

例 8-9 求下圖斜線面積之形心位置$\bar{x}$，$\bar{y}$?



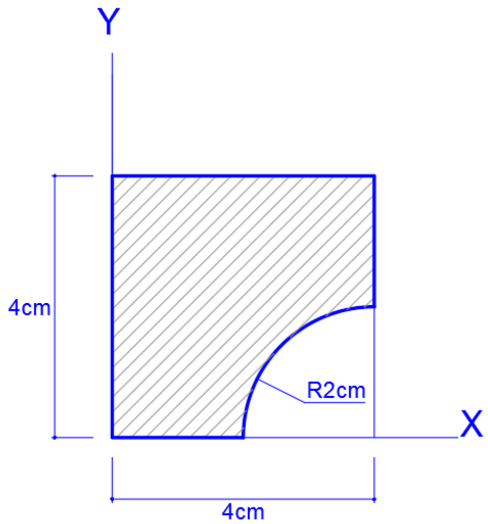


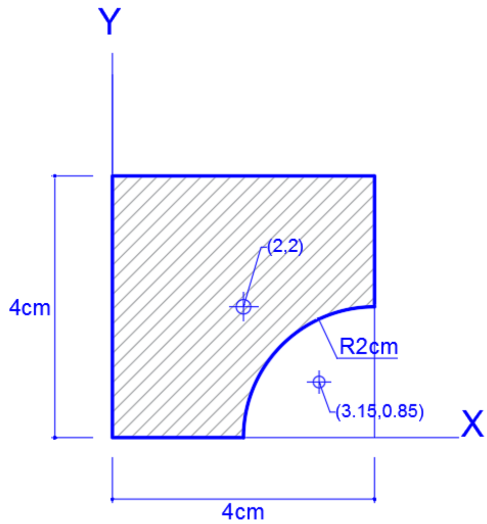
[解] 矩形面積 A1=8x5=40cm^2 三角形 A2=8x3/2=12 cm^2 半圓形 A3=$\frac{\pi\times3^2}{2}$=14.14cm^2

形心坐標 (x1,y1)=(4,-2.5) (x2,y2)=(4,-6) (x2,y2)=(2.5,-1.27)

$$\bar{X}=\frac{40\times4+12\times2.67-14.14\times4}{40+12-14.14}=3.58cm \qquad \bar{Y}=\frac{40\times(-2.5)+12\times(-6)-14.14\times(-1.27)}{40+12-14.14}=-4.07cm$$

例 8-10 求下圖斜線面積之形心位置$\bar{x}$，$\bar{y}$?





[解] 矩形面積 A1=4x4=16cm^2　　1/4 圓弧 A2=$\frac{\pi\times2^2}{4}$=3.14cm^2

形心坐標 (x1,y1)=(2,2)　　(x2,y2)=(3.15,0.85)

$\overline{X}=\frac{16\times2-3.14\times3.15}{16-3.14}=1.72cm$　　$\overline{Y}=\frac{16\times2-3.14\times0.85}{16-3.14}=2.28cm$

二、慣性矩

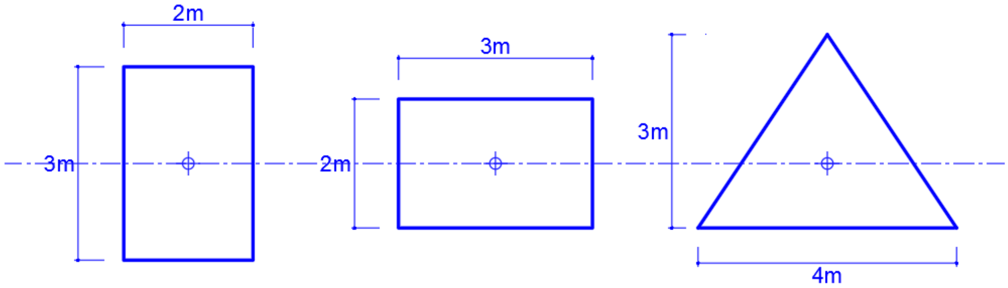
(一) 慣性矩

- 慣性矩(面積慣性矩)：使改變物體產生**變形**所需克服物體形狀所產生之慣性。
- 慣性矩的值愈大，表示愈不容易產生變形，例如：結構上所使用之 I 形樑，就是將大部分的面積集中在兩端，使得面積慣性矩值變大，而較不容易產生變形。

旋轉地球儀：轉速快時，離中心柱愈遠，離心力愈大，此原理是**運動慣性定律**

1. 物理意義：形狀分割成許多**微面積**　**，其**”散布”於**參考軸周圍**的情形。慣性矩大小表示**多數微面積**離指定軸**愈遠離**，慣性矩值**愈大**；反之，慣性矩值愈小離參考軸愈集中。
2. 單位：長度之四次方，**純量**。

[舉例]：下列圖形面積相同，形心位置在同一高度，試問何者形心軸慣性軸最小？

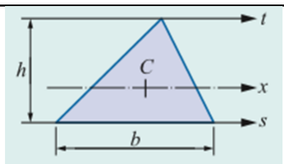
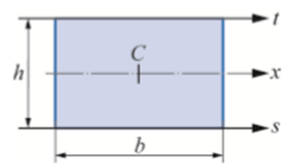
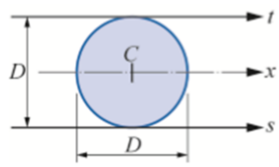


(A) (B) (C)

3. 形心軸慣性矩：
形心軸：指定軸為通過形心位置，稱為形心軸

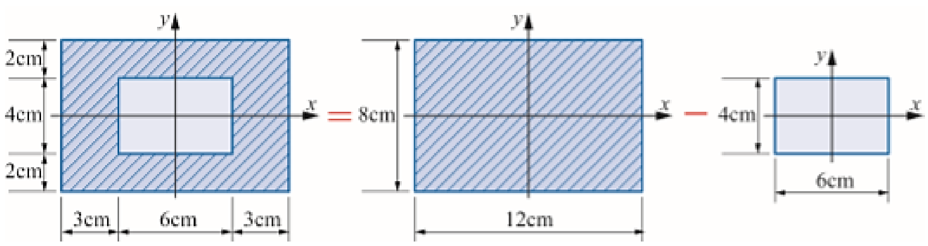
4. 底(頂)軸慣性矩：
底(頂)軸：指定軸為通過底(頂)軸位置

重 5　5.簡易面積之慣性矩(背)

	圖形	形心軸 慣性矩I_x	底軸 慣性矩I_s	頂軸 慣性矩I_t
三角形		$\frac{b \times h^3}{36}$	$\frac{b \times h^3}{36} \times 3 = \frac{b \times h^3}{12}$	$\frac{b \times h^3}{12} \times 3 = \frac{b \times h^3}{4}$
矩形		$\frac{b \times h^3}{12}$	$\frac{b \times h^3}{12} \times 4 = \frac{b \times h^3}{3}$	$\frac{b \times h^3}{3}$
圓形		$\frac{\pi \times D^4}{64}$	$\frac{\pi \times D^4}{64} \times 5 = \frac{5\pi \times D^4}{64}$	$\frac{5\pi \times D^4}{64}$

[例]

如圖 8-31(a)所示，試求此斜線面積對其形心軸之慣性矩 I_x 及 I_y。



(a) (b)

[解]：

$$I_x = I_{1x} - I_{2x}$$

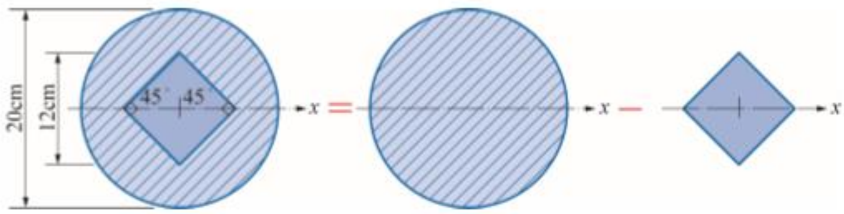
$$= \frac{12\times 8^3}{12} - \frac{6\times 4^3}{12} = 512 - 32 = 480\text{cm}^4$$

$$I_y = I_{1y} - I_{2y}$$

$$= \frac{8\times 12^3}{12} - \frac{4\times 6^3}{12} = 1152 - 72 = 1080\text{cm}^4$$

[例]

如圖 8-33(a)所示，試求此斜線面積對其水平形心軸之慣性矩 I_x。



(a) (b)

[解]：

如圖 8-33(b)分成兩個組合面，利用底軸公式可得 I_x。

(1)可視為二個半圓形面積對底軸 x 軸之慣性矩為 I_{1x}

$$\because \quad I_{1x} = \frac{\pi\cdot D^4}{128}\times 2$$

$$= (\frac{3.1416\times 20^4}{128})\times 2$$

$$= 7854\ \text{cm}^4$$

(2)菱形面積（可視為二個三角形面積）對底軸 x 軸之慣性矩為 I_{2x}

$$\because \quad I_{2x} = \frac{b\cdot h^3}{12}\times 2$$

$$= (\frac{12\times 6^3}{12})\times 2$$

$$= 432\ \text{cm}^4$$

(3)斜線面積對其水平形心軸之慣性矩

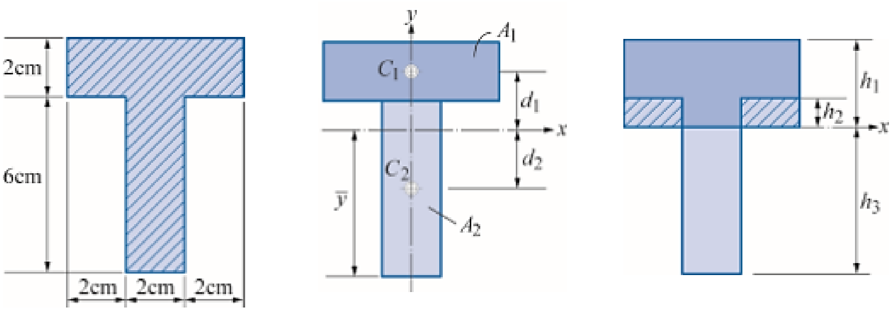
$$\because \quad I_x = I_{1x} - I_{2x}$$

$$= (7854) - (432)$$

$$= 7422\ \text{cm}^4$$

[例]

如圖 8-32(a)所示，試求此 T 形面積對其水平形心軸之慣性矩 I_x。



(a) (b) (c)

圖 8-32

[解]：先求水平形心軸 $\bar{y}$ 位置

$$\bar{y}=\frac{A_1(y_1)+A_2(y_2)}{A_1+A_2}=\frac{12(6+1)+12(3)}{12+12}=5\text{cm}$$

如圖 8-32(c)分成三個組合面，利用底軸定理可得 I_x

由前可知 $\bar{y}=5\text{cm}$ $\therefore h_1=3\text{cm}$；$h_2=1\text{cm}$；$h_3=5\text{cm}$

$$\because \quad I_x=(\frac{b_1\cdot h_1^3}{3})-(\frac{b_2\cdot h_2^3}{3})+(\frac{b_3\cdot h_3^3}{3})$$

$$=(\frac{6\cdot 3^3}{3})-[\frac{(6-2)\cdot 1^3}{3}]+(\frac{2\cdot 5^3}{3})$$

$$=(54)-(\frac{4}{3})+(\frac{250}{3})=136\text{cm}^4$$

重 6 (二) 平行軸定理

1. 定義：該平面對平行於形心軸的指定軸之

   慣性矩=形心軸慣性矩＋該平面面積× (形心至指定軸之距離)^2

2. 公式：$I_x=I_{xc}+Ad^2$ $\quad$ $I_y=I_{yc}+Ad^2$

[例]

如圖 8-56 所示斷面，試求此斷面對 $x-x$ 軸之慣性矩 $I_{x\text{-}x}$。

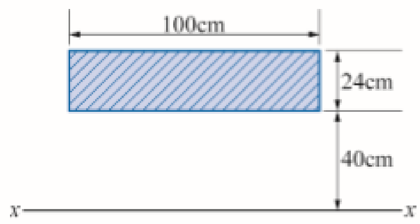
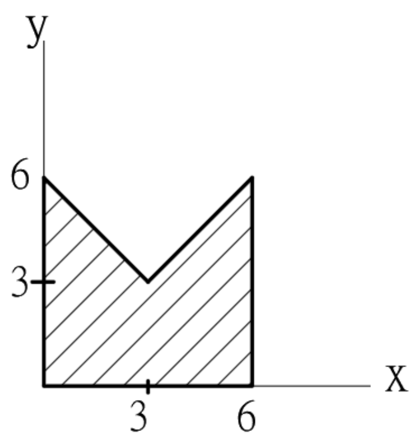


圖 8-56

[例] 試求下圖形之形心座標及對 x-x 軸之慣性矩 [形心 x=3,y=7/3 $\quad I_{x-x}$=55.5]

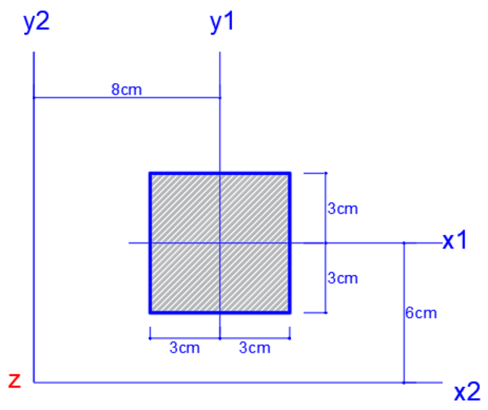


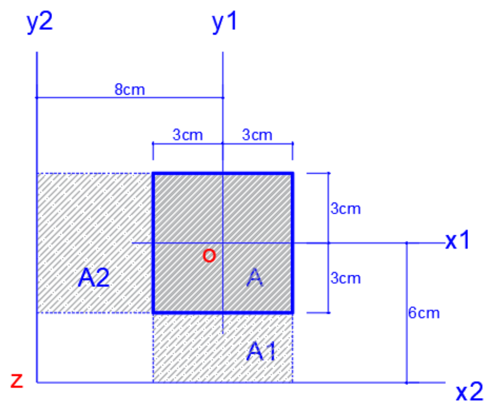
重 7 (三) 極慣性矩：表達物體對抗**扭力**的量，在應用上用來計算**扭應力**及**扭轉角**的大小

1. 定義：∫組合平面的微面積 × (微面積形心至指定點之距離)^{2}dA

2. 公式：$J=I_x+I_y$

例 8-18 方形面積分別對 o、z 點之極慣性矩 Jo、Jz ？





[解析]

1. Jo=$\frac{6\times6^3}{12}+\frac{6\times6^3}{12}$=216cm^4

2. I_{x2}=$\frac{6\times9^3}{3}-\frac{6\times3^3}{3}$=1404cm^4

I_{y2}=$\frac{6\times11^3}{3}-\frac{6\times5^3}{3}$=2412cm^4

Jz=1404+2412=3816 cm^4

重 8

三、迴轉半徑

1. 定義：迴轉半徑是任一平面對 **x 與 y 軸**之迴轉半徑；

2. 公式：**I_x= A×K_x^2 ； I_y= A×K_y^2 ； I_o= I_x+I_y= A×K_p^2=A×K_x^2+A×K_y^2**

$$K_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}\ ;\ K_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}\ ;K_p=\sqrt{\frac{I_o}{A}}=\sqrt{K_x^2+K_y^2}$$

※形心軸慣性矩相同，但面積不同，$\mathrm{Ix}=\frac{3\times12^3}{12}=432$，A=36，$K_1=\frac{12}{2\sqrt{3}}$

比較 $\mathrm{Ix}=\frac{24\times6^3}{12}=432$ ，A=144，$K_2=\frac{6}{2\sqrt{3}}$

$K_2>K_1$ 面積愈大，迴轉半徑愈大

3. 三角形形心軸慣性矩之迴轉半徑：$\frac{bh^3}{36}=\frac{\mathrm{bh}}{2}\times K^2$ $\quad K=\frac{h}{3\sqrt{2}}$

矩形形心軸慣性矩之迴轉半徑：$\frac{bh^3}{12}=bh\times K^2$ $\quad K=\frac{h}{2\sqrt{3}}$

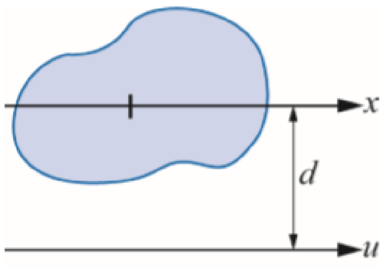
圓形形心軸慣性矩之迴轉半徑：$\frac{\pi D^4}{64}=\frac{\pi D^2}{4}\times K^2$ $\quad K=\frac{D}{4}$

※迴轉半徑大小與直立邊成正比

4. 依平行軸定理是該平面對平行於形心軸的參考軸之慣性矩；$I_x=I_{xc}+Ad^2$

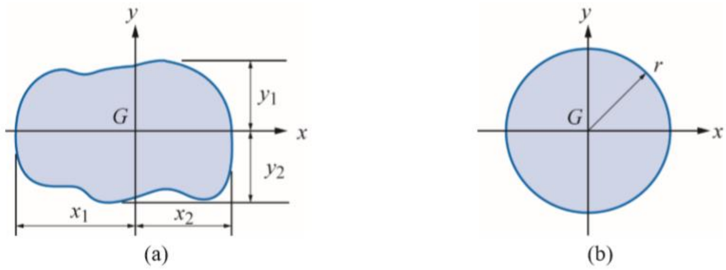
迴轉半徑 A×K_u^2=A×K_x^2+A×d^2；

$K_u^2=K_x^2+d^2$ 故 $K_u>d$



重 9 四、斷面模數（截面模數）

1. 定義：形心軸慣性矩除以中立軸(拉應力=壓應力)至截面端之距離，又稱為截面模數；



3. 公式：$Z_x = \frac{I_x}{y}$　$Z_y = \frac{I_x}{y}$　$Z_p = \frac{I_o}{r}$

例

如圖 8-43 所示，試求此圖形面積分別對其 x 軸、y 軸與 G 點之斷面模數 Z_x、Z_y 及 Z_p。

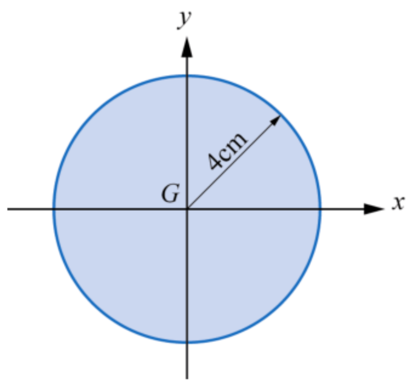


圖 8-43

解

(1) $I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot (8)^4}{64} = 64\pi$；$y = 4\text{cm}$

(2) $\because$ 對稱　$\therefore Z_x = Z_y = \frac{I_x}{y} = \frac{64\pi}{4} = 16\pi\,\text{cm}^3$

(3) $\because$　$J = I_x + I_y = 64\pi + 64\pi = 128\pi\ \text{cm}^4$

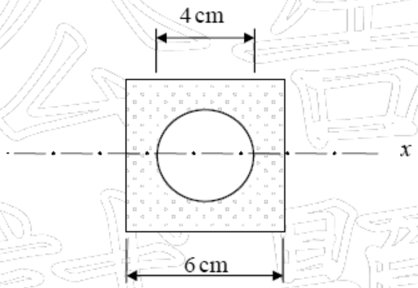
$\therefore$　$Z_p = \frac{J}{r} = \frac{128\pi}{4} = 32\pi\ \text{cm}^3$

力學下冊 第八章重心形心慣性矩 96-108 年歷屆考題集錦

96>統測 1

31. 一邊長為 6 cm 之正方形面積，現在其正中央開一直徑為 4 cm 之圓形孔，如圖(六)所示。則該斷面對形心軸 x 之慣性矩為：

(A) $108\,cm^4$　(B) $95.44\,cm^4$　(C) $82.88\,cm^4$　(D) $70.32\,cm^4$

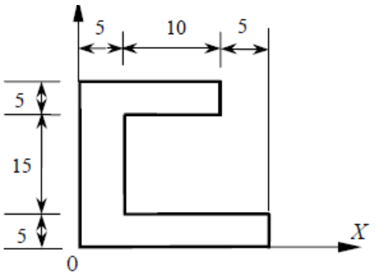


圖(六)

97>統測 2

31. 如圖(九)所示面積的形心為：(單位：cm)

(A) (8 , 12)
(B) (7 , 11.5)
(C) (8 , 11.5)
(D) (7 , 8)



圖(九)

98>統測 3

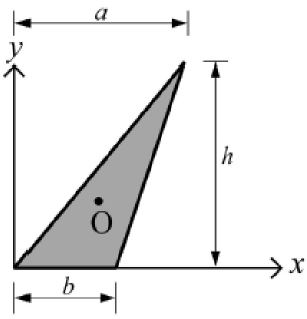
12. 如圖(五)所示，若三角形物體的形心在 O 點，則形心 O 點的座標 (x, y) 為：

(A) $(\frac{a}{3}, \frac{h}{3})$

(B) $(\frac{a+b}{3}, \frac{h}{3})$

(C) $(\frac{a+2b}{3}, \frac{h}{3})$

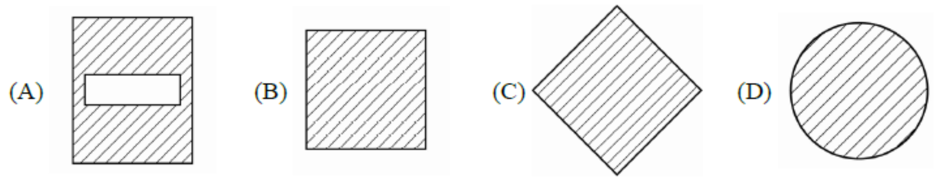
(D) $(\frac{2a+b}{3}, \frac{h}{3})$



圖(五)

99>統測 4

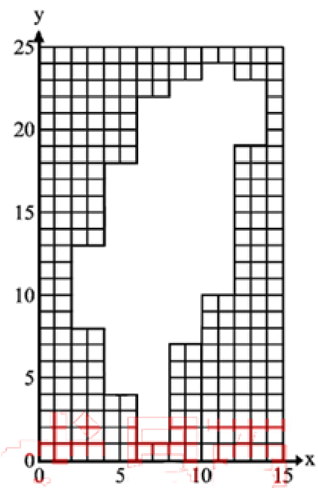
6. 以下四種樑斷面(斜線部分)，面積都相等，對水平中立軸，哪個斷面慣性矩最大？



00>統測 5

6. 將臺灣地圖畫在有 x-y 垂直座標之方格紙上，經馬賽克處理後如圖(六)所示。依圖座標值計算此臺灣地圖形心之 x-y 座標為：

(A) x=7.86、y=13.65
(B) x=7.86、y=13.77
(C) x=7.79、y=13.65
(D) x=7.79、y=13.77



01>統測 6

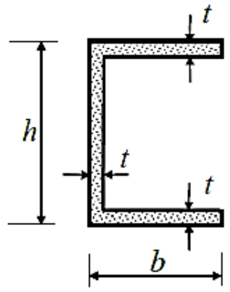
11. 一薄壁槽型剖面如圖(六)所示，其中壁厚 t 遠小於斷面的高 h 和寬 b，試計算對水平中心軸的慣性矩近似解為何？

(A) $\dfrac{th^2(h+6b)}{12}$

(B) $\dfrac{th^2(h-6b)}{12}$

(C) $\dfrac{bth^2}{2}$

(D) $\dfrac{th^3}{12}$



圖(六)

02>統測 7

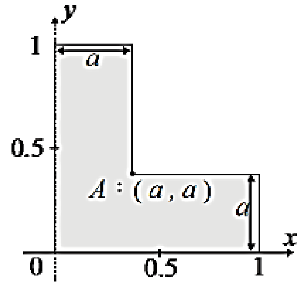
13. 如圖(九)所示之 L 形面積，a 值為多少可使形心恰位於內角落點 A(即形心座標為 (a,a))？

(A) $a=(3-\sqrt{5})/2$

(B) $a=(3+\sqrt{5})/2$

(C) $a=(1+\sqrt{3})/2$

(D) $a=(1-\sqrt{3})/2$



圖(九)

02>統測 8

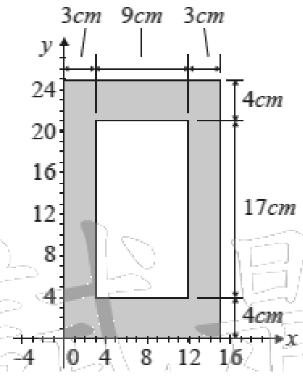
14. 如圖(十)所示之陰影區域為一箱形斷面，求對底端 x 軸之慣性矩為多少？

(A) 15846 cm^4

(B) 18622 cm^4

(C) 23216 cm^4

(D) 50534 cm^4



圖(十)

03 統測>9

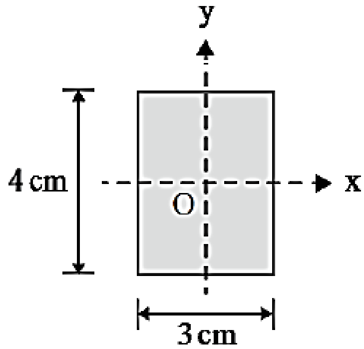
11. 一矩形斷面如圖(九)所示，x 軸及 y 軸經過此斷面之形心 O，下列敘述何者正確？

(A) 此斷面對 x 軸慣性矩等於對 y 軸慣性矩

(B) 此斷面之 x 軸慣性矩 $I_x=9\,cm^4$

(C) 此斷面之 y 軸慣性矩 $I_y=16\,cm^4$

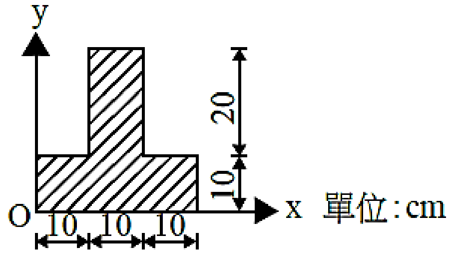
(D) 此斷面之極慣性矩 $J=25\,cm^4$



圖(九)

03>統測 10

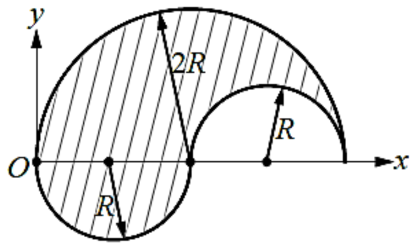
16. 如圖(十三)所示的倒 T 字型形心位置 ($\overline{X}$, $\overline{Y}$)，其 $\overline{X}$ + $\overline{Y}$ 為多少 cm？
(A) 24　(B) 25　(C) 26　(D) 27



圖(十三)

04>統測 11

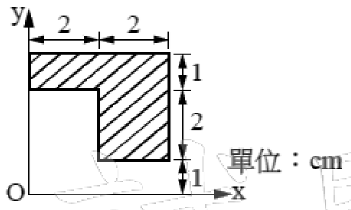
17. 如圖(十四)所示，一半徑為 $2R$ 之半圓，挖去右邊半徑為 R 之半圓補至左下方，形成如圖示之斜線部分。其形心距離 O 點之座標為 ($\bar{x}$, $\bar{y}$)，則 ($\bar{x}$, $\bar{y}$) 為何？
(A) $(1.5R, \frac{2R}{\pi})$
(B) $(1.5R, \frac{8R}{3\pi})$
(C) $(1.75R, \frac{2R}{3})$
(D) $(R, \frac{4R}{\pi})$



圖(十四)

05>統測 12

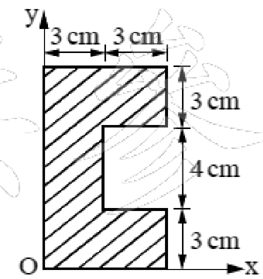
6. 如圖(五)所示之斜線區域，其形心位置距離 O 點之座標為 (X_C , Y_C)，則 $X_C + Y_C$ 為多少 cm？
(A) 5.0　(B) 5.25　(C) 5.5　(D) 5.75



圖(五)

05>統測 13

7. 如圖(六)所示之 C 形斷面，下列敘述何者正確？
(A) 此斷面形心位置距離 O 點之座標為 (2.8, 5)
(B) 此斷面對 x 軸慣性矩與對 y 軸慣性矩相同
(C) 此斷面對 x 軸慣性矩為 1684 cm^4
(D) 此斷面對 y 軸慣性矩為 684 cm^4



圖(六)

06>統測 14

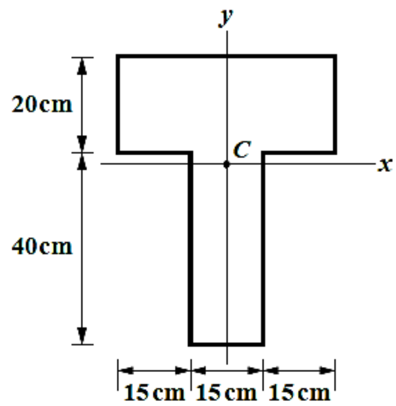
10. 有一正方形平面，每邊長為 3a，其對底邊之慣性矩大小為何？
(A) a^4　(B) $3a^4$　(C) $9a^4$　(D) $27a^4$

06 統測>15

11. 有一正方形平面，每邊長為 3a，其對底邊軸之迴轉半徑為何？
(A) $\sqrt{3}a^2$　(B) $\sqrt{3}a$　(C) $3\sqrt{3}a^2$　(D) $3\sqrt{3}a$

07>統測 16

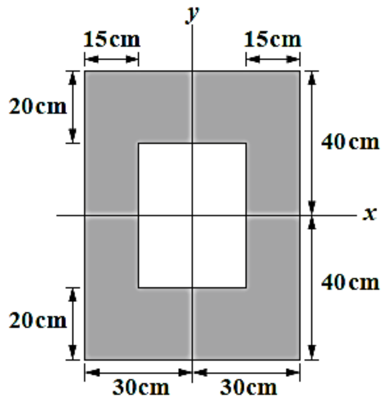
15. 如圖(十三)所示 T 型斷面，C 為其形心。斷面對 x 軸之慣性矩 I_x 為何？
(A) $6.50\times10^5\,cm^4$
(B) $4.34\times10^5\,cm^4$
(C) $2.17\times10^4\,cm^4$
(D) $1.97\times10^4\,cm^4$



圖(十三)

07>統測 17

17. 如圖(十五)所示箱型斷面對 x 軸之斷面模數 Z_x 為何？
(A) $6.00\times10^4\,cm^3$
(B) $5.80\times10^4\,cm^3$
(C) $2.40\times10^6\,cm^3$
(D) $2.32\times10^6\,cm^3$



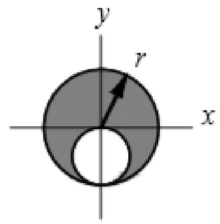
圖(十五)

08>統測 18

10. 下列有關物體重心之敘述，何者不正確？
(A) 物體的重量集中於重心，所產生的外效應，會和分別考慮由物體各質點的重量產生者一致
(B) 只有當物體是非均質的，重心才會與質心不相同
(C) 在均勻重力場中且物體是均質時，重心與形心相同
(D) 一均質等厚度的三角形平板，其重心位於距底邊三分之一高度處

08>統測 19

11. 有一圓形面積，下方挖除一圓孔，如圖(三)所示，其陰影面積之面積慣性矩 I_x 為：
(A) $\dfrac{\pi r^4}{4}$
(B) $\dfrac{15\pi r^4}{64}$
(C) $\dfrac{11\pi r^4}{64}$
(D) $\dfrac{\pi r^4}{64}$



圖(三)